Problème 3-CCP

Exercice 1.
Soit h une homothétie de rapport k et h' une homothétie de rapport k' et de centre respectif Ω, d'affixe ω, et Ω', d'affixe ω'.

1. Soit t une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe a. Montrer que les composés $h\circ t$ et $t\circ h$ sont des homothéties de rapport k. Quels sont leur centre en fonction de k,ω et a. On les appellera respectivement ω_1 l'affixe du centre Ω_1 de $h\circ t$ et ω_2 pour l'affixe du centre Ω_2 de $t\circ h$.
2. Si $kk'\neq 1$, montrer que $h\circ h'$ est une homothétie de rapport kk' et que les centres de h, h' et $h\circ h'$ (on appellera ω'' le centre de $h\circ h'$) sont alignés.
3. Si $kk'=1$, montrer que $h\circ h'$ est une translation de vecteur $\vec{v}$ dont on déterminera l'affixe sous la forme $\alpha(\omega-\omega')$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$.

Correction exercice 1 :

1. Si t est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe a. Soit M un point d'affixe z, $M'=t(M)$ le point d'affixe z' et $M''=h\circ t(M)$ le point d'affixe z'', donc il existe $k\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et $b\in\mathbb{C}$ tels que $z''=kz'+b$
   On a
   $$\begin{cases} M'=t(M)\\ h\circ t(M)=h\big(t(M)\big)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} z'=z+a\\ z''=kz'+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} z'=z+a\\ z''=k(z+a)+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} z'=z+a\\ z''=kz+ka+b\end{cases}$$
   On en déduit que $h\circ t$ est une homothétie de rapport k et de vecteur d'affixe $ka+b$.
   Centre de $h\circ t$
   Pour cela on cherche son point fixe Ω_1 d'affixe ω_1
   $$\omega_1=k\omega_1+ka+b\Leftrightarrow\omega_1(1-k)=ka+b\Leftrightarrow\omega_1=\frac{ka+b}{1-k}$$
   Pour exprimer l'affixe de ce centre en fonction de l'affixe de Ω le centre de h d'affixe ω. Le centre de h est le point fixe de h d'affixe $\omega=\frac{b}{1-k}$ (voir cours ou refaire cette petite démonstration) donc $b=\omega(1-k)$, ce que l'on remplace dans
   $$\omega_1=\frac{ka+b}{1-k}=\frac{ka+\omega(1-k)}{1-k}=\omega+\frac{ka}{1-k}$$
   Si t est la translation de vecteur $\vec{u}$ et soit a l'affixe du vecteur $\vec{u}$. Soit M un point d'affixe z, $M'=h(M)$ le point d'affixe z' et $M''=t\circ h(M)$ le point d'affixe z'', donc il existe $k\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et $b\in\mathbb{C}$ tels que $z'=kz+b$
   $$\begin{cases} M'=h(M)\\ t\circ h(M)=t\big(h(M)\big)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} z'=kz+b\\ z''=z'+a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} z'=kz+b\\ z''=kz+b+a\end{cases}$$
   On en déduit que $t\circ h$ est une homothétie de rapport k.
   Centre de $t\circ h$
   Pour cela on cherche le point fixe Ω_2 d'affixe ω_2
   $$\omega_2=k\omega_2+a+b\Leftrightarrow\omega_2=\frac{a+b}{1-k}$$

Pour exprimer l'affixe de ce centre en fonction de l'affixe de Ω le centre de h d'affixe ω. Le centre de $h \circ t$ est le point fixe de h d'affixe $\omega = \frac{b}{1-k}$ (voir cours ou refaire cette petite démonstration) donc $b = \omega(1-k)$, ce que l'on remplace dans

$$\omega_2 = \frac{a+b}{1-k} = \frac{a+\omega(1-k)}{1-k} = \omega + \frac{a}{1-k}$$

2. Soit M un point d'affixe z, $M' = h'(M)$ le point d'affixe z' et $M'' = h \circ h'(M)$ le point d'affixe z''. Il existe $k, k' \in \mathbb{R}$ avec $kk' \neq 1$ et $b, b' \in \mathbb{C}$ tels que

$$\begin{cases} z' = k'z + b' \\ z'' = kz' + b \end{cases}$$

Donc $z'' = k(k'z + b') + b = kk'z + kb' + b$

Ce qui montre que $h \circ h'$ est une homothétie de rapport kk' car $kk' \neq 1$.

Le centre de h a pour affixe ω et celui de h' a pour affixe ω' tels que

$$\begin{cases} \omega = \dfrac{b}{1-k} \\ \omega' = \dfrac{b'}{1-k'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = (1-k)\omega \\ b' = (1-k')\omega' \end{cases}$$

On en déduit que

$$z'' = kk'z + kb' + b = kk'z + k(1-k')\omega' + (1-k)\omega$$

Le centre de $h \circ h'$ est le point fixe Ω'' d'affixe ω''

$$\omega'' = kk'\omega'' + k(1-k')\omega' + (1-k)\omega \Leftrightarrow \omega'' = \frac{k(1-k')\omega' + (1-k)\omega}{1-kk'}$$

$$\omega'' - \omega = \frac{k(1-k')\omega' + (1-k)\omega}{1-kk'} - \omega = \frac{k(1-k')\omega' + (1-k)\omega - (1-kk')\omega}{1-kk'}$$

$$= \frac{k(1-k')\omega' - k\omega + kk'\omega}{1-kk'} = \frac{k\omega'(1-k') - k\omega(1-k')}{1-kk'} = \frac{k(1-k')}{1-kk'}(\omega' - \omega)$$

Ce qui signifie que $\overrightarrow{\Omega\Omega''} = \frac{k(1-k')}{1-kk'}\overrightarrow{\Omega\Omega'}$

Donc les trois centres sont alignés.

3. Soit M un point d'affixe z, $M' = h'(M)$ le point d'affixe z' et $M'' = h \circ h'(M)$ le point d'affixe z''. Il existe $k, k' \in \mathbb{R}$ avec $kk' \neq 1$ et $b, b' \in \mathbb{C}$ tels que

$$\begin{cases} z' = k'z + b' \\ z'' = kz' + b \end{cases}$$

Donc $z'' = k(k'z + b) + b' = kk'z + kb + b' = z + kb + b'$

Ce qui montre que $h \circ h'$ est une translation de vecteur $\vec{v}$ d'affixe $kb + b'$

Déterminons l'affixe de ce vecteur en fonction de ω et de ω' les affixes des centres des deux homothéties. On a

$$\begin{cases} \omega = \dfrac{b}{1-k} \\ \omega' = \dfrac{b'}{1-k'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = (1-k)\omega \\ b' = (1-k')\omega' \end{cases}$$

On en déduit que

$$z'' = z + kb' + b = z + k(1-k')\omega' + (1-k)\omega = z + k\omega' - kk'\omega' + (1-k)\omega$$

$$= z + k\omega' - \omega' + (1-k)\omega = z + (k-1)\omega' + (1-k)\omega = z + (1-k)(\omega - \omega')$$

Par conséquent $\vec{v}$ a pour affixe $(1-k)(\omega - \omega')$

Problème

Exercice 2.

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$$

Partie I

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Etudier la parité de f et en déduire un intervalle d'étude.
3. Calculer f' la dérivée de f partout où cela ne pose pas de problème.
4. Montrer que f n'est pas dérivable en $x = 1$. Que peut-on en déduire sur le graphe de f au point d'abscisse $x = 1$?
5. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}^+$, avec les limites et les valeurs de f aux points remarquables.
6. Tracer le graphe de f sur $\mathbb{R}$.

Partie II

7. Donner les expressions de $f'(x)$ sur les intervalles $[0,1[$ et $]1,+\infty[$. En déduire qu'il existe deux constantes K_1 et K_2 (que l'on déterminera) telles que

$$\forall x \in [0,1[, f(x) = 2\arctan(x) + K_1$$
$$\forall x \in]1,+\infty[, f(x) = -2\arctan(x) + K_2$$

8. Dans un même schéma, tracer les graphes :

$$\mathcal{G}_1 = \{(x,y) \in [0,1[\times \mathbb{R}, y = 2\arctan(x)\}$$
$$\mathcal{G}_2 = \{(x,y) \in]1,+\infty[\times \mathbb{R}, y = -2\arctan(x)\}$$
$$\mathcal{G}_3 = \{(x,y) \in [0,1[\times \mathbb{R}, y = 2\arctan(x) + K_1\}$$
$$\mathcal{G}_4 = \{(x,y) \in]1,+\infty[\times \mathbb{R}, y = -2\arctan(x) + K_2\}$$

   On se servira du graphe de la fonction arctan

   En déduire le graphe de f sur $\mathbb{R}^+$.

Partie III

9. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \arcsin(\sin(2t))$

   Etudier la parité et la périodicité de g, sur quel intervalle peut-on l'étudier, puis montrer que $g\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = g(t)$, en déduire un axe de symétrie. Finalement étudier g sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et tracer le graphe de g sur $\mathbb{R}$ (au moins sur trois périodes). On donnera l'expression de g sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$
10. Pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ calculer $f(\tan(t))$.
11. Calculer la dérivée de g sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$ et sur $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, puis dériver $f(\tan(t))$ (en tant que composée de deux fonctions) pour retrouver ce résultat.

Correction exercice 2 :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$1 - \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2 = 1 - \frac{4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1)^2 - 4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 2x^2 + 1 - 4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2} = \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2 \geq 0$$

   Par conséquent pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2 \leq 1$$

   Ce qui montre que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = \arcsin\left(\frac{-2x}{(-x)^2+1}\right) = -\arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$$

f est impaire, on l'étudiera sur $\mathbb{R}^+$.

3. On pose $u(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, alors $u'(x) = \frac{2(x^2+1)-2x\times 2x}{(x^2+1)^2} = 2\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-\left(u(x)\right)^2}} = \frac{2\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}}{\sqrt{\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}} = \frac{2\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}}{\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|} = \frac{2\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}}{\frac{|x^2-1|}{x^2+1}} = 2\frac{1-x^2}{|x^2-1|}\times\frac{1}{x^2+1}$$

4. Pour $x \in [0,1[$, $x^2-1<0$, donc $|x^2-1| = -(x^2-1) = 1-x^2$ et alors

$$f'(x) = \frac{2}{x^2+1}$$

Pour $x \in]1,+\infty[$, $x^2-1>0$, donc $|x^2-1| = x^2-1$ et alors

$$f'(x) = \frac{-2}{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^+} f'(x) = -1$$

Ce qui montre que f n'est pas dérivable en $x=1$.

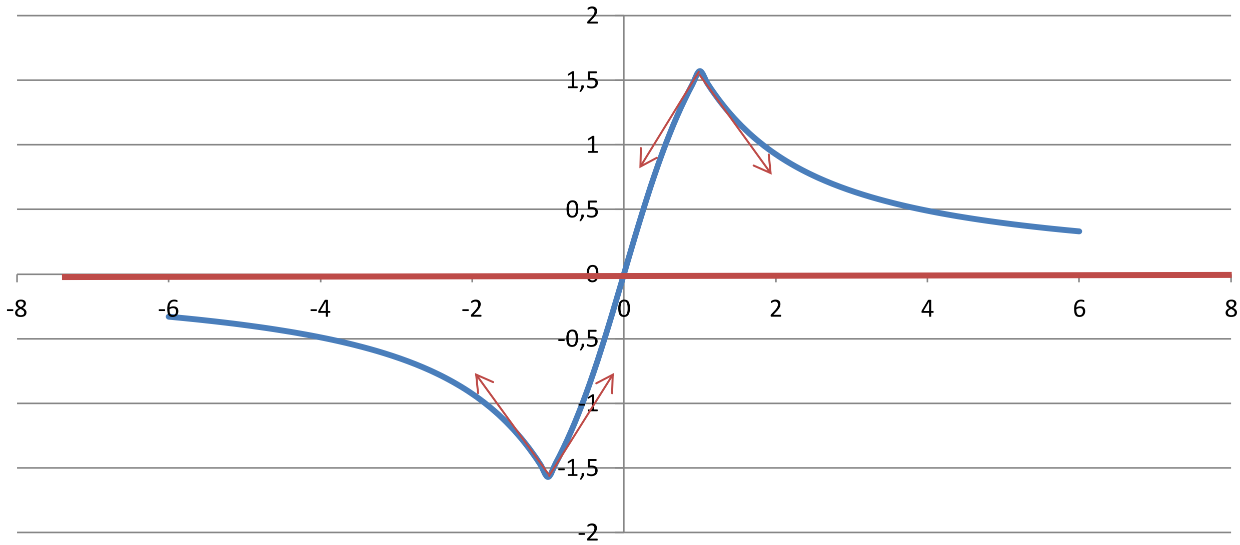
Le graphe de f admet des demi-tangentes obliques en ce point.

5.

$$f(0) = \arcsin(0) = 0;\quad f(1) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2};\qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \arcsin(0) = 0$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

6.



7.

$$\forall x \in [0,1[, f'(x) = \frac{2}{x^2+1} \Rightarrow \exists K_1 \in \mathbb{R}, \forall x \in [0,1[, f(x) = 2\arctan(x) + K_1$$

Pour $x=0$, $f(0) = 2\arctan(0) + K_1$, or $f(0) = 0$ donc $K_1 = 0$

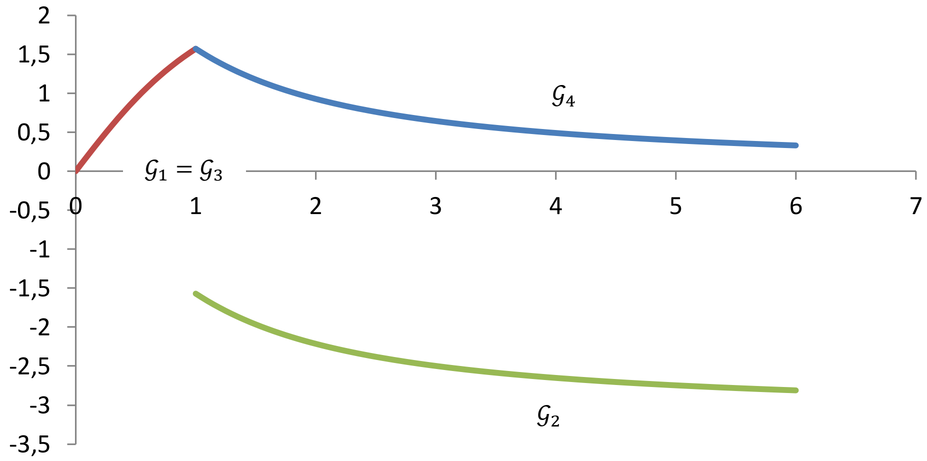
Donc $\forall x \in [0,1[, f(x) = 2\arctan(x)$

$$\forall x\in\,]1,+\infty[,\, f'(x)=-\frac{2}{x^2+1}\Rightarrow \exists K_2\in\mathbb{R},\forall x\in\,]1,+\infty[,\, f(x)=-2\arctan(x)+K_2$$

Pour $x\to+\infty$, $f(x)=2\arctan(x)+K_2$, donne $0=2\times\frac{\pi}{2}+K_2$, soit $K_2=-\pi$

Donc $\forall x\in\,]1,+\infty[,\, f(x)=-2\arctan(x)-\pi$

8.



Et le graphe de f sur $\mathbb{R}^+$ est $\mathcal{G}_1\cup\mathcal{G}_4$.

9.

$$g(-t)=\arcsin(\sin(-2t))=-g(t)$$

Donc g est impaire.

$$g(t+\pi)=\arcsin(\sin\big(2(t+\pi)\big)=\arcsin(\sin(2t+2\pi))=g(t)$$

Donc g est π périodique.

On peut donc étudier g sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

$$g\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\arcsin\left(\sin\left(2\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)\right)=\arcsin(\sin(\pi-2t))=\arcsin(-\sin(-2t))$$
$$=-\arcsin(\sin(-2t))=-\arcsin(-\sin(2t))=g(t)$$

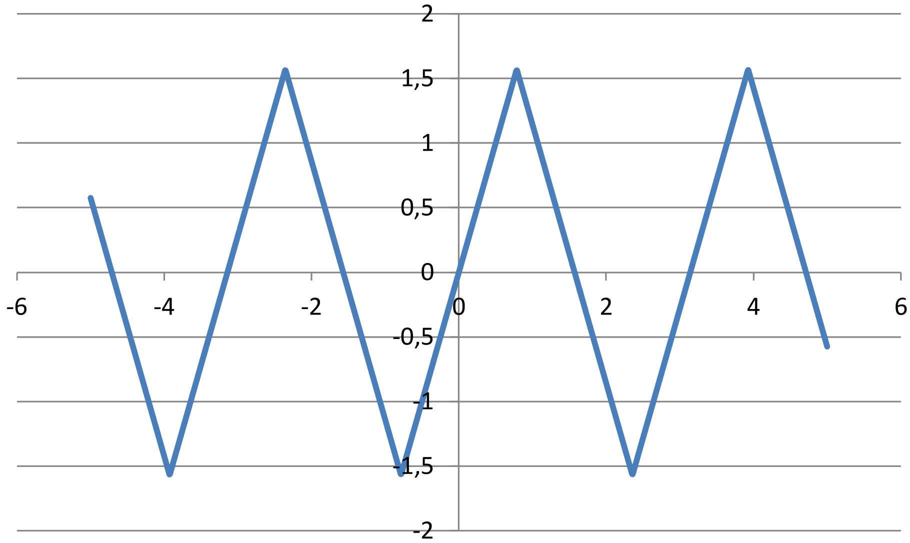
Donc la droite d'équation $t=\frac{\pi}{4}$ est un axe de symétrie et on peut étudier g sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

$$0\le t\le\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow 0\le 2t\le\frac{\pi}{2}$$

Ce qui entraine que pour tout $t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, $g(t)=2t$

Pour $t\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$, $g(t)=g\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=2\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\pi-2t$, car $\frac{\pi}{2}-t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

Graphe de g



10. Pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$f(\tan(t)) = \arcsin\left(\frac{2\tan(t)}{1 + tan^2(t)}\right) = \arcsin(\sin(2t)) = g(t)$$

11.

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[, g(t) = 2t \Rightarrow \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[, g'(t) = 2$$

$$\forall t \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right], g(t) = \pi - 2t \Rightarrow \forall x \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right], g'(t) = -2$$

D'après 10.

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[, \tan(t) \in [0,1[\ g(t) = f(\tan(t)) \Rightarrow \forall \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[, g'(t) = f'(\tan(t)) \times (1 + \tan^2(t))$$

$$= \frac{2}{1 + \tan^2(t)} \times (1 + \tan^2(t)) = 2$$

$$\forall t \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right], \tan(t) \in]1, +\infty[\ g(t) = f(\tan(t)) \Rightarrow \forall \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right], g'(t) = f'(\tan(t)) \times (1 + \tan^2(t))$$

$$= \frac{-2}{1 + \tan^2(t)} \times (1 + \tan^2(t)) = -2$$