Université Claude Bernard-Lyon 1 Semestre d'automne 2016-2017
Fondamentaux des mathématiques 1

Problème 1

Exercice 1.

Première partie
Question de cours : Montrer que pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$:
$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$
Préciser dans quel cas a-t-on une égalité.
Donner une interprétation géométrique. On pourra faire un schéma.

Deuxième partie
Soit $w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$ et w_n n complexes non nuls vérifiant
$$\left|\sum_{k=1}^{n} w_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |w_k| \qquad (1)$$
Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ on appelle $\theta_k \in]-\pi, \pi]$ l'argument principal de w_k.

1. Montrer que :
$$\sum_{\substack{j,k=1 \\ j\neq k}}^{n} w_j \overline{w}_k = 2 \sum_{\substack{j,k=1 \\ j<k}}^{n} \mathcal{R}e\left(w_j \overline{w}_k\right)$$

2. Montrer que pour tout $(j, k) \in \{1, \dots, n\}^2$:
$$\mathcal{R}e\left(w_j \overline{w}_k\right) \leq |w_j||w_k| \qquad (2)$$

3. Pour quels n-uplets de complexes a-t-on :
$$\mathcal{R}e\left(w_j \overline{w}_k\right) = |w_j||w_k| \quad ?$$

4. En utilisant l'identité (1), montrer qu'il existe un unique $\theta \in]-\pi, \pi]$, tel que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$:
$$w_k = |w_k| e^{i\theta}$$

Troisième partie
Soit $w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$ et w_n n complexes non nuls tels qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$:
$$w_k = |w_k| e^{i\theta}$$
Montrer que le n-uplet $(w_1, \dots, w_n)$ vérifie (1).
Que peut-on déduire des parties 1 et 2.

Quatrième partie

1. Pour $n = 3$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$ donner trois complexes w_1, w_2 et w_3 qui vérifient :
$$\left|\sum_{k=1}^{3} w_k\right| = \sum_{k=1}^{3} |w_k|$$
2. Pour n quelconque, donner un n-uplet $(w_1, \dots, w_n)$ de complexe vérifiant :
$$\left|\sum_{k=1}^{n} w_k\right| = 0$$

Correction exercice 1 :

Première partie

$$|z+z'|^2=(z+z')\left(\overline{z+z'}\right)=(z+z')\left(\overline{z}+\overline{z'}\right)=z\overline{z}+z\overline{z'}+z'\overline{z}+z'\overline{z'}=|z|^2+z\overline{z'}+\overline{z\overline{z'}}+|z'|^2$$
$$=|z|^2+2\mathcal{R}e\left(z\overline{z'}\right)+|z'|^2\leq|z|^2+2\left|z\overline{z'}\right|+|z'|^2=|z|^2+2|z|\left|\overline{z'}\right|+|z'|^2$$
$$=|z|^2+2|z||z'|+|z'|^2=(|z|+|z'|)^2$$

Comme $|z+z'|\geq 0$ et $|z|+|z'|\geq 0$

On a $|z+z'|\leq|z|+|z'|$

Le cas d'égalité est réalisé si et seulement si $\mathcal{R}e\left(z\overline{z'}\right)=|z||z'|$ ce qui équivaut à $z\overline{z'}\in\mathbb{R}^+$ soit encore à $arg\left(z\overline{z'}\right)=2k\pi,k\in\mathbb{Z}$, comme $arg\left(z\overline{z'}\right)=arg(z)+arg\left(\overline{z'}\right)+2k\pi,k\in\mathbb{Z}$, on a $arg(z)+arg\left(\overline{z'}\right)=2k\pi,k\in\mathbb{Z}$, puis $arg(z)-arg(z')=2k\pi,k\in\mathbb{Z}$

Finalement $\mathcal{R}e\left(z\overline{z'}\right)=|z||z'|\Leftrightarrow arg(z)=arg(z')+2k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Soient $\vec{u}$ le vecteur d'affixe z, $\overrightarrow{u'}$ le vecteur d'affixe z' et $\vec{u}+\overrightarrow{u'}$ le vecteur d'affixe $z+z'$

Ce résultat montre que $\left\|\vec{u}+\overrightarrow{u'}\right\|\leq\|\vec{u}\|+\left\|\overrightarrow{u'}\right\|$ et qu'il y a égalité si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont colinéaires et dans la même direction

Deuxième partie

1.

$$\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n} w_j\overline{w}_k=\sum_{\substack{j,k=1\\ j<k}}^{n} w_j\overline{w}_k+\sum_{\substack{j,k=1\\ k>j}}^{n} w_j\overline{w}_k$$

En changeant le nom des indices dans la seconde somme, $j\to k$ et $k\to j$

$$\sum_{\substack{j,k=1\\ k>j}}^{n} w_j\overline{w}_k=\sum_{\substack{j,k=1\\ j<k}}^{n} w_k\overline{w}_i$$

Par conséquent

$$\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{n} w_j\overline{w}_k=\sum_{\substack{j,k=1\\ j<k}}^{n} w_j\overline{w}_k+\sum_{\substack{j,k=1\\ k>j}}^{n} w_k\overline{w}_j=\sum_{\substack{j,k=1\\ j<k}}^{n} w_j\overline{w}_k+\sum_{\substack{j,k=1\\ j<k}}^{n} w_k\overline{w}_j=\sum_{\substack{j,k=1\\ j<k}}^{n}\left(w_j\overline{w}_k+w_k\overline{w}_j\right)$$
$$=\sum_{\substack{j,k=1\\ j<k}}^{n}\left(w_j\overline{w}_k+\overline{w_j\overline{w}_k}\right)=2\sum_{\substack{j,k=1\\ j<k}}^{n}\mathcal{R}e\left(w_j\overline{w}_k\right)$$

2. Pour tout $(j,k)\in\{1,\dots,n\}^2$: $\mathcal{R}e\left(w_j\overline{w}_k\right)\leq\left|w_j\overline{w}_k\right|=\left|w_j\right||\overline{w}_k|=\left|w_j\right||w_k|$
3. Pour tout $(j,k)\in\{1,\dots,n\}^2$, $\mathcal{R}e\left(w_j\overline{w}_k\right)=\left|w_j\right||w_k|\Leftrightarrow\mathcal{R}e\left(w_j\overline{w}_k\right)=\left|w_j\overline{w}_k\right|$

   Comme $w_j\overline{w}_k=\left|w_j\right|e^{i\theta_j}|\overline{w_k}|e^{-i\theta_k}=\left|w_j\right||w_k|e^{i(\theta_j-\theta_k)}$

$$\mathcal{R}e\left(w_j\overline{w}_k\right)=\left|w_j\right||w_k|\Leftrightarrow\mathcal{R}e\left(w_j\overline{w}_k\right)=\left|w_j\overline{w}_k\right|\Leftrightarrow\left|w_j\right||w_k|\cos\left(\theta_j-\theta_k\right)=\left|w_j\right||w_k|$$
$$\Leftrightarrow\cos\left(\theta_j-\theta_k\right)=1$$

   Car les $w_k\neq 0$. Puis

$$\cos\left(\theta_j-\theta_k\right)=1\Leftrightarrow\exists l\in\mathbb{Z},\theta_j-\theta_k=2l\pi$$

   D'après l'énoncé pour tout $j\in\{1,\dots,n\}$ et $k\in\{1,\dots,n\}$

$$-\pi<\theta_j\leq\pi$$
$$-\pi\leq-\theta_i<\pi$$

   D'où $-2\pi<\theta_j-\theta_k<2\pi$, ce qui impose que $l=0$ donc pour tout $(j,k)\in\{1,\dots,n\}^2$ $\theta_j=\theta_k$.

   On pose alors $\theta=\theta_1=\cdots=\theta_n$ et on a pour tout $k\in\{1,\dots,n\}$, $w_k=|w_k|e^{i\theta}$

4.

$$\left|\sum_{k=1}^{n} w_k\right| = \sum_{k=1}^{n}|w_k| \Leftrightarrow \left|\sum_{k=1}^{n} w_k\right|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n}|w_k|\right)^2 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} w_j \overline{\sum_{k=1}^{n} w_k} = \sum_{j=1}^{n}|w_j|\sum_{k=1}^{n}|w_k| \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} w_j \sum_{k=1}^{n} \overline{w_k}$$

$$= \sum_{1\leq j,k\leq n} |w_j||w_k| \Leftrightarrow \sum_{1\leq j,k\leq n} w_j\overline{w_k} = \sum_{1\leq j,k\leq n} |w_j||w_k| \Leftrightarrow \sum_{\substack{1\leq j,k\leq n \\ j\neq k}} w_j\overline{w_k} + \sum_{k=1}^{n}|w_k|^2$$

$$= \sum_{\substack{1\leq j,k\leq n \\ j\neq k}} |w_j||w_k| + \sum_{k=1}^{n}|w_k|^2 \Leftrightarrow 2\sum_{\substack{j,k=1 \\ j<k}}^{n} \mathcal{R}e\left(w_j\overline{w}_k\right) = 2\sum_{\substack{j,k=1 \\ j<k}}^{n} \sum_{\substack{1\leq j,k\leq n \\ j\neq k}} |w_j||w_k|$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\substack{j,k=1 \\ j<k}}^{n} \mathcal{R}e\left(w_j\overline{w}_k\right) = \sum_{\substack{j,k=1 \\ j<k}}^{n} |w_j||w_k|$$

D'après 2. La première somme est inférieure ou égale à la seconde, il n'y a égalité que si pour tout j,k $\mathcal{R}e\left(w_j\overline{w}_k\right) = |w_j||w_k|$

Troisième partie

$$\left|\sum_{k=0}^{n} w_k\right| = \left|\sum_{k=0}^{n}|w_k|e^{i\theta}\right| = \left|e^{i\theta}\sum_{k=0}^{n}|w_k|\right| = \left|e^{i\theta}\right|\left|\sum_{k=0}^{n}|w_k|\right| = 1\times\sum_{k=0}^{n}|w_k| = \sum_{k=0}^{n}|w_k|$$

Donc le n-uplet $(w_1, \dots, w_n)$ vérifie (1).

On déduit des parties 1 et 2 que :

Soit $w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$ et w_n, n complexes non nuls.

Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$w_k = |w_k|e^{i\theta}$$

Equivaut à ce que le n-uplet vérifie (1).

Quatrième partie

1.

$$w_1 = e^{\frac{i\pi}{3}};\, w_2 = 2e^{\frac{i\pi}{3}} \text{ et } w_3 = 3e^{\frac{i\pi}{3}}$$

Conviennent

2.

$$\forall i \in [\![1,n]\!], w_i = e^{\frac{2i(k-1)\pi}{n}}$$

Convient car la somme des racines n-ième de l'unité est nulle

Exercice 2.

Soit Ω l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Soit θ le réel de $[0,\pi[$ tel que $\begin{cases}\cos(\theta) = \frac{7}{25} \\ \sin(\theta) = \frac{24}{25}\end{cases}$

1. Pour tout entier naturel p, on pose $z_p = e^{ip\theta}$.
   a. Pour tout couple d'entiers p et q, montrer que $|z_p - z_q| = 2\left|\sin\left((p-q)\frac{\theta}{2}\right)\right|$.
   b. Calculer $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et montrer qu'ils sont dans $\mathbb{Q}$. En déduire : $\forall p,q \in \mathbb{N}, |z_p - z_q| \in \mathbb{Q}$.

Indication : calculer $e^{i(p-q)\frac{\theta}{2}}$ pour $p \geq q$.

2. On pose maintenant, $\forall k \in \mathbb{N},\ \omega_k = z_{2^k}$ (par exemple $\omega_3 = z_8$)
   a. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Re(\omega_k) = a_k 10^{-2^k}$, où a_k n'est pas un multiple de 10.
   Indication : noter que $(28+96i)^{2^k} = a_k + ib_k$, où il existe $u_k, v_k \in \mathbb{Z}$ tels que :
   $$(H_k)\begin{cases} a_k = 8 + 10u_k \\ b_k = 6 + 10v_k \end{cases}$$
   Et on montrera (H_k) par récurrence sur k.
   b. En déduire que les ω_k sont distincts deux à deux. (On raisonnera par l'absurde).
   c. Montrer que les z_k sont deux à deux distincts. (On raisonnera par l'absurde).
   d. En déduire que $\frac{\theta}{\pi}$ est irrationnel, autrement dit que $\frac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q}$. (On raisonnera par l'absurde).

Correction exercice 2 :

1.
   a. Soient p et q deux entiers naturels.
   On a $|z_p - z_q| = |e^{ip\theta} - e^{iq\theta}| = \left|e^{i\frac{p+q}{2}\theta}\left(e^{i\frac{p-q}{2}\theta} - e^{i\frac{p-q}{2}\theta}\right)\right| = \left|e^{i\frac{p+q}{2}\theta}\right|\left|e^{\frac{i(p-q)\theta}{2}} - e^{-\frac{i(p-q)\theta}{2}}\right| = \left|2i\sin\left((p-q)\frac{\theta}{2}\right)\right| = 2\left|\sin\left((p-q)\frac{\theta}{2}\right)\right|$
   b. On a
   $$\begin{cases} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \dfrac{1+\cos(\theta)}{2} = \dfrac{1+\frac{7}{25}}{2} = \dfrac{32}{50} = \dfrac{16}{25} \\ \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \dfrac{1-\cos(\theta)}{2} = \dfrac{1-\frac{7}{25}}{2} = \dfrac{18}{50} = \dfrac{9}{25} \end{cases}$$

   Or $0 \leq \theta < \pi$ entraine que $0 \leq \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ donc $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$ et $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$, par conséquent
   $$\begin{cases}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{4}{5} \in \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{3}{5} \in \mathbb{Q}\end{cases}$$
   On suppose que $p \geq q$, si $p \leq q$, on remarque que $\left|\sin\left((p-q)\frac{\theta}{2}\right)\right| = \left|\sin\left((q-p)\frac{\theta}{2}\right)\right|$ et cela revient au-même en remplaçant $p-q$ par $q-p$ ci-dessous
   $$e^{i(p-q)\frac{\theta}{2}} = \left(e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^{p-q} = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{p-q} = \sum_{k=0}^{p-q}\binom{n}{k}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^k\left(i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{n-k}$$
   En utilisant successivement la formule de Moivre et la formule du binôme de Newton
   Comme $\sin\left((p-q)\frac{\theta}{2}\right)$ est la partie imaginaire de $e^{i(p-q)\frac{\theta}{2}}$ et que celle-ci est une combinaison linéaire des puissances de $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ multiplié par des puissances de $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$, donc
   $$\sin\left((p-q)\frac{\theta}{2}\right) \in \mathbb{Q}$$
   d'où $2\left|\sin\left((p-q)\frac{\theta}{2}\right)\right| = |z_p - z_q| \in \mathbb{Q}$.

2.
   a. Il est clair que $(28+96i)^{2^k} = a_k + ib_k$ où a_k et b_k sont des entiers relatifs (Formule du binôme).
   Pour $k = 0$

$$(28+96i)^{2^0} = 28+96i$$
$$a_0 = 28 = 8 + 2\times 10 \quad \text{et} \quad b_0 = 6 + 9 \times 10$$

Donc (H_0) est vérifié .

$$a_{k+1} + ib_{k+1} = (28+96i)^{2^{k+1}} = (28+96i)^{2\times 2^k} = \left((28+96i)^{2^k}\right)^2 = (a_k + ib_k)^2$$
$$= a_k^2 - b_k^2 + 2ia_kb_k$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= (8+10u_k)^2 - (6+10v_k)^2 = 64 + 160u_k + 100u_k^2 - (36 + 120v_k + 100v_k^2) \\ &= 28 + 160u_k + 100u_k^2 - 36 + 120v_k + 100v_k^2 \\ &= 8 + 10(16u_k + 10u_k^2 + 12v_k + 10v_k^2) = 8 + 10u_{k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= 2(8+10u_k)(6+10v_k) = 2(48 + 80v_k + 60u_k + 100u_kv_k) \\ &= 96 + 160v_k + 120u_k + 200u_kv_k = 6 + (9 + 16v_k + 12u_k + 20u_kv_k) \\ &= 6 + 10v_{k+1} \end{aligned}$$

$$u_{k+1} = 16u_k + 10u_k^2 + 12v_k + 10v_k^2 \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad v_{k+1} = 9 + 16v_k + 12u_k + 20u_kv_k \in \mathbb{Z}$$

Ce montre que $(H_k) \Rightarrow (H_{k+1})$ est vraie. Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $u_k, v_k \in \mathbb{Z}$ tels que : $\begin{cases} a_k = 8 + 10u_k \\ \beta_k = 6 + 10v_k \end{cases}$ et alors bien sûr, a_k n'est pas un multiple de 10.

b. On suppose qu'il existe deux entiers j et k entiers, avec $j < k$ tels que $\omega_j = \omega_k$.
On en déduit $Re(\omega_j) = Re(\omega_k)$ donc $a_j 10^{-2^{j+1}} = a_k 10^{-2^{k+1}}$, il en découle que
$$a_k = a_j 10^{2^k - 2^j}$$
Ce qui entraine que a_k est un multiple de 10, ce qui est impossible, d'où tous les ω_k sont distincts deux à deux.

c. Supposons qu'il existe deux entiers p et q, avec $p < q$ tels que $z_p = z_q$
$$z_p = z_q \Leftrightarrow e^{ip\theta} = e^{iq\theta} \Leftrightarrow e^{i(q-p)\theta} = 1 \Leftrightarrow \left(e^{i\theta}\right)^{q-p} = 1$$
Ce qui montre que $e^{i\theta}$ est une des $q-p$ racines $(q-p)$-ième de l'unité. Il existe $n \in [\![0, q-p]\!]$ tel que $e^{i\theta} = ^{\frac{2in\pi}{q-p}}$, alors :
$$(\omega_k)^{q-p} = \left(e^{i2^k\theta}\right)^{q-p} = \left(e^{i\theta}\right)^{2^k(q-p)} = \left(\left(e^{i\theta}\right)^{q-p}\right)^{2^k} = 1^{2^k} = 1$$
Autrement dit ω_k est une des $q-p$ racines $(q-p)$-ième de l'unité, or il y a un nombre infini de ω_k, c'est impossible, par conséquent tous les z_k sont distincts.

d. Supposons que $\frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}$, il existe a et b entiers rationnels tels que :
$$\frac{\theta}{\pi} = \frac{a}{b}$$
Donc
$$\theta = \frac{a}{b}\,\pi$$
Ce qui entraine que
$$z_p^b = \left(e^{ip\theta}\right)^b = e^{i\theta pb} = e^{iap\pi} = 1$$
Autrement dit z_p est une racine b-ième de l'unité, il y a donc un nombre fini de « z_p » ce qui est impossible puisque d'après c. il y a un nombre infini de « z_k ».