Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2013-2014
Math II - PMI - Analyse

Feuille d'exercices numéro 10
Introduction aux probabilités

Formalisme des événements, indépendance

Exercice 1
Dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ on suppose que trois événements A, B et C éléments de $\mathcal{A}$ vérifient les propriétés suivantes :

$$P(A) = \frac{1}{3} \qquad P(B) = \frac{2}{3} \qquad P(C) = \frac{13}{24} \qquad P(B|A) = \frac{5}{8} \qquad P(A|C) = \frac{4}{13} \qquad P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = \frac{1}{24}.$$

1) Calculer $P(A \cap B)$ et $P(A \cap C)$, puis $P(A \cap B \cap C)$.

2) On suppose en outre qu'il est impossible que ni A, ni B, ni C ne soit réalisé. Quelle est la probabilité que deux exactement des événements A, B et C soient réalisés ?

Exercice 2
Un système électrique est composé de trois circuits en parallèle. Le premier circuit est formé de deux interrupteurs en série R_1 et R_2, le second de trois interrupteurs en série R_3, R_4 et R_5 et le dernier d'un unique interrupteur R_6.
Les hypothèses sont les suivantes :
* les fermetures des six interrupteurs sont indépendantes.
* les probabilités d'ouverture des six interrupteurs sont respectivement : 0,5 0,1 0,8 0,4 0,1 0,3.
Quelle est la probabilité que le circuit laisse passer le courant (un interrupteur laisse passer le courant quand il est fermé) ?

Formalisme des variables aléatoires

Exercice 3

1) Une personne lance une pièce non truquée une fois. On note X le nombre de fois où elle obtient "pile". Déterminer la loi de X.

2) Une personne lance une pièce non truquée n fois consécutives. On note X le nombre de fois où elle obtient "pile". Déterminer la loi de X.

3) Alain et Bernadette lancent séparément chacun n fois une pièce non truquée. On note X_1 le nombre de "piles" obtenus par Alain et X_2 le nombre de "piles" obtenus par Bernadette. Déterminer la probabilité que $X_1 = X_2$.

Exercice 4
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire k boules dans cette urne, avec remise. On note X_i $(1 \leq i \leq n)$ le résultat du i-ème tirage.

1) La question posée est "Soit m un entier fixé $(1 \leq m \leq n)$, quelle est la probabilité pour que le plus gros numéro tiré vaille m ?"
Retraduire cette question comme une question posée sous forme "Déterminer la loi de $\cdots$"

2) Répondre à la question qu'on vient de poser.

Exercice 5
On décrit le trafic dans une rue par l'hypothèse suivante :
la probabilité qu'une voiture passe pendant une seconde donnée est p ; les passages de voitures à chaque seconde forment un système d'événements indépendants.

1) Un piéton encore leste peut franchir la rue si aucune voiture ne passe dans la seconde qui suit le début de sa traversée.
Donner la loi de la variable T_1 temps d'attente du piéton.

2) Un piéton moins leste ne peut franchir la rue que si aucune voiture ne passe dans les deux secondes qui suivent le début de sa traversée.
Soit T_2 le temps d'attente de ce piéton.
Montrer que pour tout $n \geq 1$, $P(T_2 > n) = pP(T_2 > n-1) + (1-p)pP(T_2 > n-2)$.
En déduire la loi de T_2.

Manipulation de lois à travers l'exemple des lois géométriques
Définition (utilisée dans les trois exercices qui suivent) : pour X variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et p réel de $]0,1[$, on dira que X est régie par une loi géométrique $\texttt{Geom}(p)$ lorsque X prend ses valeurs dans $\mathbf{N}$ et sa loi est régie par : pour tout k entier positif, $P(X = k) = p(1-p)^k$.

Exercice 6
Soit X une variable aléatoire régie par une loi géométrique $\texttt{Geom}(p)$. Pour k et n entiers positifs, calculer :

$$P(X = n + k | X \geq k).$$

Exercice 7
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes toutes deux régies par une loi géométrique $\texttt{Geom}(\frac{1}{2})$. Déterminer la loi de $\mathrm{Max}(X, Y)$.

Exercice 8
Soit p un réel avec $0 < p < 1$, et soit $(X_k)_{1 \leq i \leq N}$ une famille de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé. On suppose les (X_k) indépendantes et on suppose qu'elles sont toutes régies par une même loi géométrique $\texttt{Geom}(p)$.

1) Calculer la loi de $S_2 = X_1 + X_2$.

2) Soit a un entier naturel fixé. Montrer par récurrence sur b que pour tout $b \geq a + 1$:

$$\sum_{r=a}^{b-1} \binom{r}{a} = \binom{b}{a+1}.$$

3) Pour tout k avec $1 \leq k \leq N$, montrer que la loi de $S_k = X_1 + \cdots + X_k$ est donnée par :

$$P(X_k = n) = \binom{n+k-1}{n} p^k (1-p)^n.$$