Suites définies par une récurrence linéaire.

.

Récurrence d'ordre 1 à n composantes.

Soit $A \in M_d(K)$. On s'intéresse à des suites vectorielles (U_n), $n \geq 0$, à valeurs dans K^d vérifiant une récurrence linéaire:

$$U_{n+1} = AU_n (*)$$

Une solution de (*) est une suite vérifiant (*). En itérant, on a:

$$U_n = A^n U_0$$

d'où

Théorème d'existence et d'unicité. Pour tout vecteur $v \in K^d$ il existe une solution unique (U_n) vérifiant la condition initiale $U_0 = v$.

Pour calculer A^n on réduit A à une forme simple (diagonale, Dunford,...).

.

Propriétés générales.

1. L'ensemble des solutions (U_n) est un espace vectoriel de dimension d.

2. Si (U_n) est une solution, $c \in N$ et $V_n = U_{n+c}$, alors (V_n) est aussi une solution.

3. *Complexification.* Soit A une matrice *réelle* et (U_n) une solution *complèxe*; alors la partie réelle et la partie imaginaire de (U_n) sont des solutions réelles.

Il est donc utile de chercher dès le début des solutions complèxes.

4. Chaque vecteur propre v de A, $Av = \lambda v$, engendre une solution "exponentielle": $U_n = \lambda^n v$.

5. *Changement de base.* Par un changement linéaire des variables, $U = PV$, la récurrence $U_{n+1} = AU_n$ est transformé en $V_{n+1} = BV_n$ avec $B = P^{-1}AP$. On a $A = PBP^{-1}$ et $A^n = PB^nP^{-1}$.

.

Cas diagonalisable.

Si A est diagonalisable, une base de vecteurs propres $(v_1, ..., v_d)$ de A donne une base de solutions "exponentielles" $(\lambda_1^n v_1)$,..., $(\lambda_d^n v_d)$. pour une condition initiale v donnée, il suffit de décomposer v par rapport à la base $(v_1, ..., v_d)$: $v = \sum_i a_i v_i$ et la solution avec $U_0 = v$ sera $U_n = \sum_i a_i \lambda_i^n v_i$.

.

Une rédaction alternative. Soit P la matrice de passage vers une base de vecteurs propres, donc $A = PBP^{-1}$ avec B diagonale, $B = diag(\lambda_1, ..., \lambda_d)$. Alors $B^n = diag(\lambda_1^n, ..., \lambda_d^n)$ et $A^n = Pdiag(\lambda_1^n, ..., \lambda_d^n)P^{-1}$.

Utilisation des projecteurs spectraux. Soit A diagonalisable, $(\lambda_1, ..., \lambda_k)$ $(k \leq d)$ le spectre de A et Π_i le projecteur spectral associé à la valeur propre λ_i. Alors $A = \sum_i \lambda_i \Pi_i$ et on vérifie immédiatement que

$$A^n = \sum_i \lambda_i^n \Pi_i$$

Calcul de Π_i. Si A est diagonalisable, son polynôme minimal est à racines simples: $m_A(x) = (x - \lambda_1)...(x - \lambda_k)$. .

Soit $q_i(x) = (x - \lambda_1)...(x - \lambda_{i-1})(x - \lambda_{i+1})...(x - \lambda_k) = m_A(x)/(x - \lambda_i)$.

Alors le projecteur spectral Π_i est donné par

$$\Pi_i = \frac{1}{q_i(\lambda_i)} q_i(A)$$

Structure des solutions (U_n) *dans le cas diagonalisable.*

La formule $U_n = \sum_i a_i \lambda_i^n v_i$ montre que toute solution complèxe est une somme des suites géométriques λ_i^n munies de coefficients constants. Par exemple, si une valeur propre λ_i dans cette somme est de module strictement plus grand que les autres, l'asymptotique de U_n est déterminée par le terme $a_i \lambda_i^n v_i$.

.

Cas général.

L'espace $E = K^d$ de décompose en somme directe des sous-espaces caractéristiques, $E = \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{C}_i$. On peut utiliser la décomposition de Dunford: $A = \mathcal{D} + \mathcal{N}$, ou $\mathcal{D}$ est diagonalisable, N nilpotente: $\mathcal{N}^l = 0$ et $\mathcal{D}$ commute avec $\mathcal{N}$.

Rappeleons que $\mathcal{D} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \Pi_i$, où Π_i est le projecteur spectral sur $\mathcal{C}_i$, et $\mathcal{N} = A - \mathcal{D}$. Alors

$$(\mathcal{D} + \mathcal{N})^n = \sum_0^{l-1} C_n^j \mathcal{D}^{n-j} \mathcal{N}^j$$

La somme contient au plus l termes. Il faut donc calculer les puissances $\mathcal{N}^j$ pour $1 \leq j < l$ et la suite $\mathcal{D}^n$: $\mathcal{D}^n = \sum_{i=1}^k \lambda_i^n \Pi_i$.

.

Pour calculer Π_i on écrit $m_A(x) = (x - \lambda_i)^{l_i} q(x)$ où $q(x)$ est premier avec $(x - \lambda_i)$ (ce qui est équivalent à $q(\lambda_i) \neq 0$). Par la formule de Bézout, on peut trouver des polynômes $r(x)$ et $s(x)$ tels que $(x - \lambda_i)^{l_i} r(x) + q(x)s(x) = 1$.

[On peut s'arranger pour que deg $(s) < l_i$ et deg $(r) < \deg(q)$].

Alors $\Pi_i = q(A)s(A)$.