Equation scalaire d'ordre n.

$$\frac{d^n}{dt^n}x + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}x + ... + a_1\frac{d}{dt}x + a_0x = 0(*)$$

A l'équation (*) on peut associer un système différentiel équivalent d'ordre 1 en introduisant de nouvelles inconnues: $x_0 = x$, $x_1 = x'$, $x_{n-1} = x^{(n-1)}$. Le système s'écrit $x'_0 = x_1$, ..., $x'_{n-2} = x_{n-1}$, $x'_{n-1} = -(a_0x_0 + ... + a_{n-1}x_{n-1})$. En notation vectorielle cela donne $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ où $\mathbf{x} = (x_0, ..., x_{n-1}) = (x, x', x'', ..., x^{(n-1)})$ et $A = (a_{ij})$ est la matrice "compagnon":

$a_{i,i+1} = 1$, $a_{n,j} = -a_{j-1}$ et les autres éléments de A sont nuls.

.

On sait que le polynôme caractéristique de A est

$p_A(z) = (-1)^n(z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1z + a_0)$,

et on sait que le polynôme minimal est égal (au signe près) au polynôme caractéristique; soit $p_A(z) = (-1)^n(z - \lambda_1)^{m_1}...(z - \lambda_k)^{m_k}$.

Donc pour chaque valeur propre λ_i l'indice de nilpotence dans le sous-espace caractéristique associé est égal à m_i. (Noter que les espaces propres sont tous de dimension 1.) On en déduit:

.

2.12. Proposition. Soit $p_A(z) = (-1)^n(z - \lambda_1)^{m_1}...(z - \lambda_k)^{m_k}$. Les fonctions $t^{p_j}e^{\lambda_j t}$, où $j = 1, ..., k$ et $0 \le p_j < m_j$ forment une base (complèxe) des solutions de l'équation (*).

.

Toute solution s'écrit donc comme $\sum_{j=1}^k q_j(t)e^{\lambda_j t}$, où $q_j(t)$ sont des polynômes, $\deg(q_j) < m_j$.

Remarque. A chaque racine λ de l'équation $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1z + a_0 = 0$ est associée une solution exponentielle $x(t) = e^{\lambda t}$. Réciproquement, on obtient l'équation caractéristique $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = 0$ en exigeant que la fonction $x(t) = e^{\lambda t}$ vérifie l'équation différentielle.

.

Si les coefficients $a_0, ..., a_{n-1}$ sont réels, une base des solutions reélles est donnée par les fonctions $t^{p_j}e^{\lambda_j t}$ (pour les λ_j réelles) et $t^{p_j}e^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t)$ et $t^{p_j}e^{\alpha_j t}\sin(\beta_j t))$ (pour les λ_j complèxes, où $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$) et $0 \le p_j < m_j$.

.

En vu de ce résultat, on n'a pas besoin de passer par la matrice, mais on peut traiter l'équation (*) directement:

.

2.13. Lemme. λ est une racine du polynôme caractéristique

$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1z + a_0$ de multiplicité m si et seulement si les "monômes" $e^{\lambda t}$, $te^{\lambda t}$,..., $t^{m-1}e^{\lambda t}$ vérifient l'équation différentielle (*).

.

•• *Démonstration.* Faisons dans l'équation (*) la substitution suivante : $x(t) = u(t)e^{\lambda t}$. On a $\frac{d}{dt}(ue^{\lambda t}) = (\frac{d}{dt}u + \lambda u)e^{\lambda t} = (\frac{d}{dt} + \lambda)ue^{\lambda t}$.

Donc l'équation (*) devient

$$(\frac{d}{dt} + \lambda)^n u + a_{n-1}(\frac{d}{dt} + \lambda)^{n-1}u + ... + a_1(\frac{d}{dt} + \lambda)u + a_0 u = 0$$

ou, si on développe,

$$u^{(n)} + b_{n-1}u^{(n-1)} + ... + b_0 u = 0(**)$$

.

Pour le polynôme caractéristique $\tilde{p}(z) = z^n + b_{n-1}z^{n-1} + ... + b_1 z + b_0$ de l'équation (**) on a $\tilde{p}(z) = p(z + \lambda)$ (facile à vérifier). Donc λ est une racine de $p(z)$ de multiplicité m si et seulement si 0 est une racine de $\tilde{p}(z)$ de multiplicité m, ce qui veut dire que $b_0 = 0$, ... $b_{m-1} = 0$.

L'équation (**) devient $u^{(n)} + b_{n-1}u^{(n-1)} + ... + b_m u^{(m)} = 0$ et admet donc des solutions $1, t, ..., t^{m-1}$. Reciproquement, si (**) admet des solutions $1, t, ..., t^{m-1}$, alors $b_0 = 0$, ... $b_{m-1} = 0$ et 0 est une racine de $\tilde{p}(z)$ de multiplicité m. ••

.

Démarche à suivre: pour résoudre l'équation scalaire (*) avec la condition initiale $x(0) = c_1$, $x'(0) = c_2$, ..., $x^{(n-1)}(0) = c_n$ il faut

1) résoudre l'équation caractéristique $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0$ qui se déduit directement de l'équation différentielle, sans passer par la matrice;

2) écrire la solution comme une combinaison linéaire des solutions de base explicitées dans la Proposition 2.12 avec des coefficients indéterminés et calculer les coefficients afin de satisfaire les conditions initiales (cela revient à résoudre un système d'équations linéaires).

.

Equation scalaire non homogène d'ordre n. "Quasipolynômes".

On considère l'équation

$$\frac{d^n}{dt^n}x + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}x + ... + a_1\frac{d}{dt}x + a_0 x = q(t)e^{\mu t}(*)$$

Proposition 2.14. Soit $q(t)$ un polynôme de degré d.

(i) Si λ n'est pas une racine de l'équation caractéristique, il existe une solution particulière de la forme $u(t) = r(t)e^{\lambda t}$, où $r(t)$ est un polynôme de degré d.

(ii) Si λ est une racine de l'équation caractéristique de multiplicité m, il existe une solution particulière (complèxe) de la forme $u(t) = r(t)e^{\lambda t}$ où $r(t)$ est un polynôme de degré $d + m$.

.

•• *Démonstration.*

Faisons dans l'équation (*) la substitution suivante : $x(t) = u(t)e^{\lambda t}$. On a $\frac{d}{dt}(ue^{\lambda t}) = (\frac{d}{dt}u + \lambda u)e^{\lambda t} = (\frac{d}{dt} + \lambda)ue^{\lambda t}$.

Donc l'équation (*) devient

$$e^{\mu t}[(\frac{d}{dt} + \lambda)^n u + a_{n-1}(\frac{d}{dt} + \lambda)^{n-1}u + ... + a_1(\frac{d}{dt} + \lambda)u + a_0 u] = q(t)e^{\mu t}$$

ou, si on développe,

$$u^{(n)} + b_{n-1}u^{(n-1)} + ... + b_0 u = q(t)(**)$$

Considérons l'application linéaire L définie dans l'espace des polynômes par

$$L(u) = u^{(n)} + b_{n-1}u^{(n-1)} + ... + b_0 u$$

.

Evidemment, $\deg(L(u) \leq \deg\ (u)$. En plus, si μ est une racine de l'équation caractéristique de multiplicité m, on a $b_0 = 0$, ... ,$b_{m-1} = 0$ et donc $\deg(L(u) \leq \deg\ (u) - m$. (Voir Lemme 2.12.)

Donc pour tout k, L définie un endomorphisme de l'espace $E_k = C_k[x]$ des polynômes de degré $\leq k$. On sait que

1. $L(E_k) \subseteq E_{k-m}$ (parce que $\deg(L(u) \leq \deg\ (u) - m)$;

2. Ker $(L) = E_{m-1}$ (parce que les polynômes vérifiant l'équation $u^{(n)} + b_{n-1}u^{(n-1)} + ... + b_m u^{(m)} = 0$ sont précisement les polynômes de degré $< m$ - à vérifier).

Noter que dim $E_k = k + 1$. Soit $k \geq m$. La formule du rang

dim $(KerL)$+ dim (ImL) =dim E_k dans l'espace E_k entraine

dim $L(E_k) = k - m + 1$, donc dim $L(E_k) =$ dim E_{k-m}. Conclusion: $L(E_k) = E_{k-m}$, donc pour tout polynôme $q(t)$ de degré d il existe un polynôme $u(t)$ de degré $k = d + m$ tel que $L(u) = q$.

[Vérification de Ker $(L) = E_{m-1}$: soit

$u^{(n)} + b_{n-1}u^{(n-1)} + ... + b_m u^{(m)} = 0$.

On remarque que $b_m \neq 0$.

Posons $w = u^{(m)}$, donc $w^{(n-m)} + b_{n-1}w^{(n-m-1)} + ... + b_m w = 0$. Supposons que w est non nul de degré k, donc $w(z) = c_k z^k + ... + c_0$ avec $c_k \neq 0$; alors $0 = w^{(n-m)} + b_{n-1}w^{(n-m-1)} + ... + b_m w = c_k z^k +$ *termes de degré inférieur*, donc $c_k = 0$ - contradiction.]

••

.

Remarque: Pour déterminer le polynôme $r(t)$ il suffit de l'écrire avec les coefficients indéterminés; la condition que $u(t) = r(t)e^{\mu t}$ vérifie l'équation différentielle donne un système linéaire qui permet de trouver les coefficients de $r(t)$.