Réduction des endomorphismes 4. bis

.

Rappel. 1. Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si il est annulé par un polynôme scindé à racines simples.

2. Toute valeur propre de f est racine de tout polynôme annulateur de f.

.

Cas diagonalisable. Soit f diagonalisable, donc le radical

$r(x) = (x - \lambda_1)...(x - \lambda_k)$ annule f: $r(f) = 0$. [$\lambda_1, ..., \lambda_k$ sont les valeurs propres.]

Soit $q_i(x) = (x - \lambda_1)...(x - \lambda_{i-1})(x - \lambda_{i+1})...(x - \lambda_k)$.

Le projecteur Π_i sur le sous-espace propre $E_i = Ker(f - \lambda_i Id)$ parallèlement aux autres sous-espaces propres est donné par

$$\Pi_i = \frac{1}{q_i(\lambda_i)} q_i(f)$$

.

.

Sous-espaces caractéristiques.

4.1. Définition. Soit λ une valeur propre de multiplicité m. Le sous-espace $\mathcal{C}_\lambda = Ker((f - \lambda Id))^m$ s'appelle le **sous-espace caractéristique** associé à la valeur propre λ. **Noter que $\mathcal{C}_\lambda$ est stable par f et contient l'espace propre associé à λ.**

Le lemme des noyaux donne le corollaire:

4.2. Corollaire. Les sous-espaces caractéristiques associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont en somme directe.

.

4.3. Lemme. 1. La dimension de $\mathcal{C}_\lambda$ est égale à la multiplicité m de λ.

2. Soit f_λ l'endomorphisme induit par f dans $\mathcal{C}_\lambda$. Alors

$p_{f_\lambda}(x) = (-1)^m (x - \lambda)^m$.

.

•• *Démonstration.* On peut écrire $p_f(x) = (x - \lambda)^m q(x)$ où $q(x)$ est premier avec $(x - \lambda)$ (ce qui est équivalent à $q(\lambda) \neq 0$).

Vu que $(f_\lambda - \lambda Id)^m = 0$, on a $p_{f_\lambda}(x) = (-1)^k (x - \lambda)^k$, où k est la dimension de $\mathcal{C}_\lambda$. Par le lemme des noyaux, $E = \mathcal{C}_\lambda \bigoplus E'$, ou $E' = Ker(q(f))$ est stable par f. Donc $p_f(x) = p_{f_\lambda}(x) p_{f'}(x)$ où f' est l'endomorphisme induit par f dans E'. Mais λ n'est pas une valeur propre de f' (tous les vecteurs propres associés à λ appartiennent à $\mathcal{C}_\lambda$), donc $p_{f'}(\lambda) \neq 0$. En comparant $p_f(x) = (x - \lambda)^m q(x)$ et $p_f(x) = p_{f_\lambda}(x) p_{f'}(x)$ on conclut que $p_(f_\lambda)(x) = \pm (x - \lambda)^m$ et $k = m$. ••

.

Remarque. Le fait que $(f_\lambda - \lambda Id)^m = 0$ peut s'exprimer ainsi:
$f_\lambda = \lambda Id + \mathbf{n}_\lambda$, où $\mathbf{n}_\lambda$ est un endomorphisme nilpotent ($\mathbf{n}_\lambda = f_\lambda - \lambda Id$).

.

Le cas du polynôme caractéristique scindé: en combinant le théorème de Cayley-Hamilton avec le lemme des noyaux on obtient:

.

4.4. Corollaire. Si le polynôme caractéristique de f est scindé, $p_f(x) = (-1)^n(x-\lambda_1)^{m_1}...(x-\lambda_k)^{m_k}$, l'espace E se décompose en somme directe des sous-espaces caractéristiques de f: $E = \bigoplus_i \mathcal{C}_i$, où $\mathcal{C}_i = Ker(f - \lambda_i Id)^{m_i}$; la dimension de $\mathcal{C}_i$ est égale à la multiplicité m_i. Soit f_i l'endomorphisme induit dans $\mathcal{C}_i$. On a $f_i = \lambda_i Id + \mathbf{n}_i$, où $\mathbf{n}_i$ est nilpotent: $\mathbf{n}_i^{m_i} = 0$.

.

Remarque. L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si p_f est scindé et chaque sous-espace caractéristique est un espace propre.

.

4.5. Projecteurs spectraux. Soit $E = \bigoplus_i \mathcal{C}_i$. Soit Π_i la projection sur le sous-espace caractéristique $\mathcal{C}_i$ parallèlement à la somme des autres sous-espaces caractéristiques. On appelle Π_i **projecteur spectral**.

.

Si f est diagonalisable, on peut écrire $f = \sum_i \lambda_i \Pi_i$.

.

Pour calculer Π_i on écrit $p_f(x) = (x-\lambda_i)^{m_i} q(x)$ où $q(x)$ est premier avec $(x-\lambda_i)$ (ce qui est équivalent à $q(\lambda_i) \neq 0$). Posons $p_i(x) = (x-\lambda_i)^{m_i}$. Par la formule de Bézout, on peut trouver des polynômes $r(x)$ et $s(x)$ tels que $p_i(x)r(x)(x) + q(x)r(x) = 1$.

.

4.6. Lemme. $\Pi_i = q(f)r(f)$.

•• *Démonstration.* Rappelons que $\bigoplus_{j:j\neq i} \mathcal{C}_j = Ker(q(f))$ (lemme des noyaux). On a $p_i(f)r(f) + q(f)s(f) = Id$, donc $p_i(f)r(f)v + q(f)s(f)v = v$ pour tout $v \in E$. Si $v \in \mathcal{C}_i = Ker(p_i(f))$, cela donne $q(f)s(f)v = v$. Si $v \in Ker(q(f))$, on a $q(f)s(f)v = 0$. ••

.

Exemple. Soit λ une racine simple: $p_f(x) = (x-\lambda)q(x)$ où $q(x)$ est premier avec $(x-\lambda)$ (ce qui est équivalent à $q(\lambda) \neq 0$). Alors la formule de Bézout s'écrit simplement $(x-\lambda)r(x) + aq(x) = 1$ avec $a = \frac{1}{q(\lambda)}$.

Donc le projecteur spectral sur la droite propre $\mathcal{C}_\lambda$ est donné par
$\Pi_\lambda = \frac{1}{q(\lambda)} q(f)$.

.

En particulier, soit dim $E = 3$ et $p_f(x) = -(x-\lambda)(x-\mu)^2$. Alors

$1 = a(x-\mu)^2 + a(2\mu - \lambda - x)(x-\lambda)$, où $a = (\lambda - \mu)^{-2}$. Donc
$\Pi_\lambda = a(f - \mu Id)^2$ et $\Pi_\mu = Id - \Pi_\lambda = -a(f - (2\mu - \lambda)Id)(f - \lambda Id)$.

.

Les projecteurs Π_i vérifient:
1. $\Pi_1 + ... + \Pi_k = Id$.
2. $\Pi_i^2 = \Pi_i$.
3. $\Pi_i \Pi_j = 0$ si $i \neq j$.

.

Remarques. 1) Si Π est un projecteur et $\Pi f = f\Pi$, alors $\mathrm{Ker}(\Pi)$ et $\mathrm{Im}(\Pi)$ sont des sous-espaces supplémentaires stables par f.

2) Si $E_\lambda \neq \mathcal{C}_\lambda$, le sous-espace propre E_λ n'admet pas de sous-espace supplémentaire stable par f.

.

Décomposition de Dunford.

Supposons que le polynôme caractéristique de f est scindé.

Soit f_i l'endomorphisme induit dans $\mathcal{C}_i$. On a $(f_i - \lambda_i Id)^{m_i} = 0$, donc $f_i = \lambda_i Id + \mathbf{n}_i$, où $\mathbf{n}_i^{m_i} = 0$, donc $\mathbf{n}_i$ est nilpotent.

En utilisant cette décomposition, définissons deux endomorphismes,
$\mathbf{d}$ et $\mathbf{n}$: si $v \in \mathcal{C}_i$, on pose $\mathbf{d}(v) = \lambda_i v$ et $\mathbf{n}(v) = \mathbf{n}_i(v)$. Donc $f = \mathbf{d} + \mathbf{n}$.

En utilisant les projecteurs spectraux, on écrit $\mathbf{d} = \sum_i \lambda_i \Pi_i$ et $\mathbf{n} = f - \mathbf{d}$. Vu que Π_i est un polynôme de f, on en déduit que $\mathbf{d}$ et $\mathbf{n}$ sont des polynômes de f.

En résumé, $f = \mathbf{d} + \mathbf{n}$ où $\mathbf{d}$ est diagonalisable, $\mathbf{n}$ est nilpotent et $\mathbf{d}$ commute avec $\mathbf{n}$.

4.7. Théorème. (Décomposition de Dunford.) Si le polynôme caractéristique de f est scindé, f se décompose en somme $f = \mathbf{d} + \mathbf{n}$ où $\mathbf{d}$ est diagonalisable, $\mathbf{n}$ est nilpotent et $\mathbf{d}$ commute avec $\mathbf{n}$. Une telle décomposition est unique.

.

Remarque. Vu que $f = \mathbf{d} + \mathbf{n}$, les trois propriétés: (i) $\mathbf{d}$ commute avec $\mathbf{n}$, (ii) $\mathbf{d}$ commute avec f et (iii) $\mathbf{n}$ commute avec f sont équivalentes.

.

•• *Démonstration de l'unicité.* Soit $f = \mathbf{d}' + \mathbf{n}'$ une deuxième décomposition. On a $\mathbf{d} - \mathbf{d}' = \mathbf{n}' - \mathbf{n}$.

Noter que $\mathbf{d}$ et $\mathbf{d}'$ commutent avec f.

Montrons que $\mathbf{d}$ commute avec $\mathbf{d}'$. En effet, $\mathbf{d}'$ commute avec les projecteurs spectraux parce que chaque Π_i est un polynôme de f, donc $\mathbf{d}'$ commute avec $\mathbf{d} = \sum_i \lambda_i \Pi_i$.

Par conséquent, $\mathbf{d}$ et $\mathbf{d}'$ sont simultanément diagonalisable et donc $\mathbf{d} - \mathbf{d}'$ est diagonalisable.

Du fait que $\mathbf{d}$ commute avec $\mathbf{d}'$ on déduit que $\mathbf{n}$ commute avec $\mathbf{n}'$ (parce que $\mathbf{n} = f - \mathbf{d}$ et $\mathbf{n}' = f - \mathbf{d}'$). Alors on vérifie immédiatement que $\mathbf{n}' - \mathbf{n}$ est nilpotent.

L'égalité entre $\mathbf{d} - \mathbf{d}'$ diagonalisable et $\mathbf{n}' - \mathbf{n}$ nilpotent implique $\mathbf{d} - \mathbf{d}' = \mathbf{n}' - \mathbf{n} = 0$. ••

.

Remarque. 1) On a $p_f(x) = p_{\mathbf{d}}(x)$.

2) f est diagonalisable si et seulement si $\mathbf{n} = 0$.

.

Polynôme minimal.

.

Définition. Un **polynôme minimal** de f est un polynôme annulateur non-nul de degré minimum.

4.8. Proposition. *Un polynôme minimal divise tout polynôme annulateur.*

•• *Démonstration.* Soit b un polynôme minimal et a un polynôme annulateur. La division avec reste donne $a = qb + r$, donc $r = a - qb$, donc r est un polynôme annulateur de degré inférieur à celui de b, donc $r = 0$. ••

.

Par conséquent, il y a un seul polynôme minimal **unitaire** (de coefficient dominant 1), appelé **le** polynôme minimal; il sera noté m_f.

.

En particuler, **le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique.**

.

Exemple: soit f diagonalisable, $\lambda_1, ..., \lambda_k$ les valeurs propres de f deux à deux distinctes. Alors le polynôme $r(x) = (x - \lambda_1)...(x - \lambda_k)$ annule f et en fait $r(x)$ est le polynôme minimal de f.

.

4.9. Critère de diagonalisabilité. *Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.*

•• *Démonstration.* Si f est diagonalisable, f est annulé par un polynôme q scindé à racines simples; le polynôme minimal divise q et donc est aussi scindé à racines simples. Réciproquement, si le polynôme minimal est scindé à racines simples, la Proposition 3.4 s'applique. ••

.

4.10. Proposition. 1. Les racines du polynôme minimal sont exactement les valeurs propres.

2. Le polynôme minimal est scindé si et seulement si le polynôme caractéristique est scindé.

•• *Démonstration.* 1. Chaque valeur propre est racine de tout polynôme annulateur. De l'autre côté, soit α une racine de m_f; vu que m_f divise le polynôme caractéristique, α est une racine de p_f, donc une valeur propre.

2. Dans les deux cas, être scindé dans R est équivalent aux fait que toutes les valeurs propres sont réelles. ••

.

Exemple: soit f un endomorphisme nilpotent; son polynôme caractéristique est $p_f(x) = (-1)^n x^n$ ($n =$dim(E)) et le polynôme minimal est $m_f(x) = x^k$, où k est l'indice de nilpotence de f.