

## Réduction des endomorphismes 4. bis

**Rappel.** 1. Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si il est annulé par un polynôme scindé à racines simples.

2. Toute valeur propre de  $f$  est racine de tout polynôme annulateur de  $f$ .

*Cas diagonalisable.* Soit  $f$  diagonalisable, donc le radical  $r(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_k)$  annule  $f$ :  $r(f) = 0$ . [ $\lambda - i$  sont les valeurs propres]

Soit  $q_i(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_{i-1})(x - \lambda_{i+1}) \dots (x - \lambda_k)$ .

Le projecteur  $\Pi_i$  sur le sous-espace propre  $E_i = \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})$  parallèlement aux autres sous-espaces propres est donné par

$$\Pi_i = \frac{1}{q_i(\lambda_i)} q_i(f)$$

### Sous-espaces caractéristiques.

**4.1. Définition.** Soit  $\lambda$  une valeur propre de multiplicité  $m$ . Le sous-espace  $\mathcal{C}_\lambda = \text{Ker}((f - \lambda \text{Id})^m)$  s'appelle le **sous-espace caractéristique** associé à la valeur propre  $\lambda$ . **Noter que  $\mathcal{C}_\lambda$  est stable par  $f$  et contient l'espace propre associé à  $\lambda$ .**

Le lemme des noyaux donne le corollaire:

**4.2. Corollaire.** Les sous-espaces caractéristiques associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont en somme directe.

**4.3. Lemme.** 1. La dimension de  $\mathcal{C}_\lambda$  est égale à la multiplicité  $m$  de  $\lambda$ .

2. Soit  $f_\lambda$  l'endomorphisme induit par  $f$  dans  $\mathcal{C}_\lambda$ . Alors

$$p_{f_\lambda}(x) = (-1)^m (x - \lambda)^m.$$

•• *Démonstration.* On peut écrire  $p_f(x) = (x - \lambda)^m q(x)$  où  $q(x)$  est premier avec  $(x - \lambda)$  (ce qui est équivalent à  $q(\lambda) \neq 0$ ).

Vu que  $(f_\lambda - \lambda \text{Id})^m = 0$ , on a  $p_{f_\lambda}(x) = (-1)^k (x - \lambda)^k$ , où  $k$  est la dimension de  $\mathcal{C}_\lambda$ . Par le lemme des noyaux,  $E = \mathcal{C}_\lambda \oplus E'$ , où  $E' = \text{Ker}(q(f))$  est stable par  $f$ . Donc  $p_f(x) = p_{f_\lambda}(x) p_{f'}(x)$  où  $f'$  est l'endomorphisme induit par  $f$  dans  $E'$ . Mais  $\lambda$  n'est pas une valeur propre de  $f'$  (tous les vecteurs propres associés à  $\lambda$  appartiennent à  $\mathcal{C}_\lambda$ ), donc  $p_{f'}(\lambda) \neq 0$ . En comparant  $p_f(x) = (x - \lambda)^m q(x)$  et  $p_f(x) = p_{f_\lambda}(x) p_{f'}(x)$  on conclut que  $p_{f_\lambda}(x) = \pm (x - \lambda)^m$  et  $k = m$ . ••

*Remarque.* Le fait que  $(f_\lambda - \lambda Id)^m = 0$  peut s'exprimer ainsi:  
 $f_\lambda = \lambda Id + \mathbf{n}_\lambda$ , où  $\mathbf{n}_\lambda$  est un endomorphisme nilpotent ( $\mathbf{n}_\lambda = f_\lambda - \lambda Id$ ).

*Le cas du polynôme caractéristique scindé:* en combinant le théorème de Cayley-Hamilton avec le lemme des noyaux on obtient:

**4.4. Corollaire.** Si le polynôme caractéristique de  $f$  est scindé,  $p_f(x) = (-1)^n(x - \lambda_1)^{m_1} \dots (x - \lambda_k)^{m_k}$ , l'espace  $E$  se décompose en somme directe des sous-espaces caractéristiques de  $f$ :  $E = \bigoplus_i \mathcal{C}_i$ , où  $\mathcal{C}_i = Ker(f - \lambda_i Id)^{m_i}$ ; la dimension de  $\mathcal{C}_i$  est égale à la multiplicité  $m_i$ . Soit  $f_i$  l'endomorphisme induit dans  $\mathcal{C}_i$ . On a  $f_i = \lambda_i Id + \mathbf{n}_i$ , où  $\mathbf{n}_i$  est nilpotent:  $\mathbf{n}_i^{m_i} = 0$ .

*Remarque.* L'endomorphisme  $f$  est diagonalisable si et seulement si  $p_f$  est scindé et chaque sous-espace caractéristique est un espace propre.

**4.5. Projecteurs spectraux.** Soit  $E = \bigoplus_i \mathcal{C}_i$ . Soit  $\Pi_i$  la projection sur le sous-espace caractéristique  $\mathcal{C}_i$  parallèlement à la somme des autres sous-espaces caractéristiques. On appelle  $\Pi_i$  **projecteur spectral**.

Si  $f$  est diagonalisable, on peut écrire  $f = \sum_i \lambda_i \Pi_i$ .

Pour calculer  $\Pi_i$  on écrit  $p_f(x) = (x - \lambda_i)^{m_i} q(x)$  où  $q(x)$  est premier avec  $(x - \lambda_i)$  (ce qui est équivalent à  $q(\lambda_i) \neq 0$ ). Posons  $p_i(x) = (x - \lambda_i)^{m_i}$ . Par la formule de Bézout, on peut trouver des polynômes  $r(x)$  et  $s(x)$  tels que  $p_i(x)r(x) + q(x)s(x) = 1$ .

**4.6. Lemme.**  $\Pi_i = q(f)r(f)$ .

•• *Démonstration.* Rappelons que  $\bigoplus_{j:j \neq i} \mathcal{C}_j = Ker(q(f))$  (lemme des noyaux). On a  $p_i(f)r(f) + q(f)s(f) = Id$ , donc  $p_i(f)r(f)v + q(f)s(f)v = v$  pour tout  $v \in E$ . Si  $v \in \mathcal{C}_i = Ker(p_i(f))$ , cela donne  $q(f)s(f)v = v$ . Si  $v \in Ker(q(f))$ , on a  $q(f)s(f)v = 0$ . ••

*Exemple.* Soit  $\lambda$  une racine simple:  $p_f(x) = (x - \lambda)q(x)$  où  $q(x)$  est premier avec  $(x - \lambda)$  (ce qui est équivalent à  $q(\lambda) \neq 0$ ). Alors la formule de Bézout s'écrit simplement  $(x - \lambda)r(x) + aq(x) = 1$  avec  $a = \frac{1}{q(\lambda)}$ .

Donc le projecteur spectral sur la droite propre  $\mathcal{C}_\lambda$  est donné par  $\Pi_\lambda = \frac{1}{q(\lambda)}q(f)$ .

En particulier, soit  $\dim E = 3$  et  $p_f(x) = -(x - \lambda)(x - \mu)^2$ . Alors  $1 = a(x - \mu)^2 + a(2\mu - \lambda - x)(x - \lambda)$ , où  $a = (\lambda - \mu)^{-2}$ . Donc

$$\Pi_\lambda = a(f - \mu Id)^2 \text{ et } \Pi_\mu = Id - \Pi_\lambda = -a(f - (2\mu - \lambda)Id)(f - \lambda Id).$$

Les projecteurs  $\Pi_i$  vérifient:

1.  $\Pi_1 + \dots + \Pi_k = Id$ .
2.  $\Pi_i^2 = \Pi_i$ .
3.  $\Pi_i \Pi_j = 0$  si  $i \neq j$ .

*Remarques.* 1) Si  $\Pi$  est un projecteur et  $\Pi f = f\Pi$ , alors  $\text{Ker}(\Pi)$  et  $\text{Im}(\Pi)$  sont des sous-espaces supplémentaires stables par  $f$ .

2) Si  $E_\lambda \neq C_\lambda$ , le sous-espace propre  $E_\lambda$  n'admet pas de sous-espace supplémentaire stable par  $f$ .

### Décomposition de Dunford.

Supposons que le polynôme caractéristique de  $f$  est scindé.

Soit  $f_i$  l'endomorphisme induit dans  $C_i$ . On a  $(f_i - \lambda_i Id)^{m_i} = 0$ , donc  $f_i = \lambda_i Id + \mathbf{n}_i$ , où  $\mathbf{n}_i^{m_i} = 0$ , donc  $\mathbf{n}_i$  est nilpotent.

En utilisant cette décomposition, définissons deux endomorphismes,

$\mathbf{d}$  et  $\mathbf{n}$ : si  $v \in C_i$ , on pose  $\mathbf{d}(v) = \lambda_i v$  et  $\mathbf{n}(v) = \mathbf{n}_i(v)$ . Donc  $f = \mathbf{d} + \mathbf{n}$ .

En utilisant les projecteurs spectraux, on écrit  $\mathbf{d} = \sum_i \lambda_i \Pi_i$  et  $\mathbf{n} = f - \mathbf{d}$ . Vu que  $\Pi_i$  est un polynôme de  $f$ , on en déduit que  $\mathbf{d}$  et  $\mathbf{n}$  sont des polynômes de  $f$ .

En résumé,  $f = \mathbf{d} + \mathbf{n}$  où  $\mathbf{d}$  est diagonalisable,  $\mathbf{n}$  est nilpotent et  $\mathbf{d}$  commute avec  $\mathbf{n}$ .

**4.7. Théorème. (Décomposition de Dunford.)** Si le polynôme caractéristique de  $f$  est scindé,  $f$  se décompose en somme  $f = \mathbf{d} + \mathbf{n}$  où  $\mathbf{d}$  est diagonalisable,  $\mathbf{n}$  est nilpotent et  $\mathbf{d}$  commute avec  $\mathbf{n}$ . Une telle décomposition est unique.

*Remarque.* Vu que  $f = \mathbf{d} + \mathbf{n}$ , les trois propriétés: (i)  $\mathbf{d}$  commute avec  $\mathbf{n}$ , (ii)  $\mathbf{d}$  commute avec  $f$  et (iii)  $\mathbf{n}$  commute avec  $f$  sont équivalentes.

•• *Démonstration de l'unicité.* Soit  $f = \mathbf{d}' + \mathbf{n}'$  une deuxième décomposition. On a  $\mathbf{d} - \mathbf{d}' = \mathbf{n}' - \mathbf{n}$ .

Noter que  $\mathbf{d}$  et  $\mathbf{d}'$  commutent avec  $f$ .

Montrons que  $\mathbf{d}$  commute avec  $\mathbf{d}'$ . En effet,  $\mathbf{d}'$  commute avec les projecteurs spectraux parce que chaque  $\Pi_i$  est un polynôme de  $f$ , donc  $\mathbf{d}'$  commute avec  $\mathbf{d} = \sum_i \lambda_i \Pi_i$ .

Par conséquent,  $\mathbf{d}$  et  $\mathbf{d}'$  sont simultanément diagonalisable et donc  $\mathbf{d} - \mathbf{d}'$  est diagonalisable.

Du fait que  $\mathbf{d}$  commute avec  $\mathbf{d}'$  on déduit que  $\mathbf{n}$  commute avec  $\mathbf{n}'$  (parce que  $\mathbf{n} = f - \mathbf{d}$  et  $\mathbf{n}' = f - \mathbf{d}'$ ). Alors on vérifie immédiatement que  $\mathbf{n}' - \mathbf{n}$  est nilpotent.

L'égalité entre  $\mathbf{d} - \mathbf{d}'$  diagonalisable et  $\mathbf{n}' - \mathbf{n}$  nilpotent implique  $\mathbf{d} - \mathbf{d}' = \mathbf{n}' - \mathbf{n} = 0$ . ●●

*Remarque.* 1) On a  $p_f(x) = p_{\mathbf{d}}(x)$ .

2)  $f$  est diagonalisable si et seulement si  $\mathbf{n} = 0$ .

### Polynôme minimal.

**Définition.** Un **polynôme minimal** de  $f$  est un polynôme annulateur non-nul de degré minimum.

**4.8. Proposition.** *Un polynôme minimal divise tout polynôme annulateur.*

●● *Démonstration.* Soit  $b$  un polynôme minimal et  $a$  un polynôme annulateur. La division avec reste donne  $a = qb + r$ , donc  $r = a - qb$ , donc  $r$  est un polynôme annulateur de degré inférieur à celui de  $b$ , donc  $r = 0$ . ●●

Par conséquent, il y a un seul polynôme minimal **unitaire** (de coefficient dominant 1), appelé **le** polynôme minimal; il sera noté  $m_f$ .

En particulier, **le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique.**

*Exemple:* soit  $f$  diagonalisable,  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  les valeurs propres de  $f$  deux à deux distinctes. Alors le polynôme  $r(x) = (x - \lambda_1)\dots(x - \lambda_k)$  annule  $f$  et en fait  $r(x)$  est le polynôme minimal de  $f$ .

**4.9. Critère de diagonalisabilité.** *Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.*

●● *Démonstration.* Si  $f$  est diagonalisable,  $f$  est annulé par un polynôme  $q$  scindé à racines simples; le polynôme minimal divise  $q$  et donc est aussi scindé à racines simples. Réciproquement, si le polynôme minimal est scindé à racines simples, la Proposition 3.4 s'applique. ●●

**4.10. Proposition.** 1. Les racines du polynôme minimal sont exactement les valeurs propres.

2. Le polynôme minimal est scindé si et seulement si le polynôme caractéristique est scindé.

•• *Démonstration.* 1. Chaque valeur propre est racine de tout polynôme annulateur. De l'autre côté, soit  $\alpha$  une racine de  $m_f$ ; vu que  $m_f$  divise le polynôme caractéristique,  $\alpha$  est une racine de  $p_f$ , donc une valeur propre.

2. Dans les deux cas, être scindé dans  $R$  est équivalent au fait que toutes les valeurs propres sont réelles. ••

*Exemple:* soit  $f$  un endomorphisme nilpotent; son polynôme caractéristique est  $p_f(x) = (-1)^n x^n$  ( $n = \dim(E)$ ) et le polynôme minimal est  $m_f(x) = x^k$ , où  $k$  est l'indice de nilpotence de  $f$ .