Réduction des endomorphismes 4.

.

3.4. Proposition. Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si il est annulé par un polynôme scindé à racines simples.

•• *Démonstration.* a) Soit f diagonalisable et $\lambda_1, ..., \lambda_k$ les valeurs propres de f deux à deux distinctes. Alors le polynôme

$r(x) = (x - \lambda_1)...(x - \lambda_k)$ annule f.

b) Soit $p(x) = (x-\alpha_1)...(x-\alpha_k)$ un polynôme scindé à racines simples et $p(f) = 0$. Soit $p_i(x) = x-\alpha_i$; on est dans le cadre du lemme des noyaux, donc $E = Ker(p_1(f)) \bigoplus ... \bigoplus Ker(p_k(f))$. Mais $Ker(p_i(f)) = Ker(f - \alpha_i Id)$ est un espace propre associé à α_i (réduit à 0 si α_i n'est pas une valeur propre). Donc E est la somme des sous-espaces propre et f est diagonalisable. ••

.

Remarque. Soit $p(x) = (x - \alpha_1)...(x - \alpha_k)$ un polynôme scindé à racines simples et $p(f) = 0$.

Soit $q_i(x) = (x - \alpha_1)...(x - \alpha_{i-1})(x - \alpha_{i+1})...(x - \alpha_k)$.

Le projecteur Π_i sur le sous-espace propre $Ker(f - \alpha_i Id)$ parallèlement aux autres sous-espaces propres est donné par $\Pi_i = \frac{1}{q_i(\alpha_i)} q_i(f)$.

.

3.5. Corollaire. L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si le radical du polynôme caractéristique $r = \frac{p_f}{pgcd(p_f, p'_f)}$ est scindé et annule f.

3.6. Lemme. L'endomorphisme induit dans un sous-espace stable par un endomorphisme diagonalisable est diagonalisable.

•• *Démonstration.* Si f est diagonalisable, alors f est annulé par un polynôme q scindé à racines simples; l'endomorphisme induit sera aussi annulé par q et on applique la Proposition 3.5. ••

3.7. Proposition. Deux endomorphismes diagonalisables qui commutent sont diagonalisables simultanément: il existe une base commune de vecteurs propres.

•• *Démonstration.* Soit $fg = gf$. Chaque espace propre E_λ de f est stable par g, donc l'endomorphisme induit par g dans E_λ admet une base de vecteurs propres; la réunion de telles bases est une base de vecters propres copmmuns de f et g dans E. ••

.

3.8. Théorème (Cayley - Hamilton). Tout endomorphisme f est annulé par son polynôme caractéristique: $p_f(f) = 0$.

. •• *Démonstration.* Rappel: soit C une matrice $n \times n$ et $\widetilde{C}$ sa comatrice. Alors $\widetilde{C}C = det(C)I_n$. Prenons $C = A - xI_n$: $(\widetilde{A - xI_n})(A - xI_n) = p_A(x)I_n$.

Posons $B = (\widetilde{A - xI_n}) = B_0 + B_1 x + ... + B_{n-1}x^{n-1}$ et

$p_A(x) = c_0 + c_1 x + ... + c_{n-1}x^{n-1} + (-1)^n x^n$. Alors en égalisant les coefficients dans l'égalité $(\widetilde{A - xI_n})(A - xI_n) = p_A(x)I_n$ on obtient

$B_0 A = c_0 I_n$,

$B_1 A - B_0 = c_1 I_n$,

....

$B_{n-1}A - B_{n-2} = c_{n-1}I_n$,

$-B_{n-1} = (-1)^n I_n$.

Alors $p_A(A) = c_0 I_n + c_1 A + ... + c_{n-1}A^{n-1} + (-1)^n A^n =$

$B_0 A + (B_1 A - B_0)A + ... + (B_{n-1}A - B_{n-2})A^{n-1} - B_{n-1}A^n = 0$

(simplification totale). ••

.

Sous-espaces caractéristiques.

4.1. Définition. Soit λ une valeur propre de multiplicité m. Le sous-espace $\mathcal{C}_\lambda = Ker((f - \lambda Id))^m$ s'appelle le **sous-espace caractéristique** associé à la valeur propre λ. Noter que $\mathcal{C}_\lambda$ est stable par f et contient l'espace propre associé à λ.

Le lemme des noyaux donne le corollaire:

4.2. Corollaire. Les sous-espaces caractéristiques associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont en somme directe.

4.3. Lemme. 1. La dimension de $\mathcal{C}_\lambda$ est égale à la multiplicité m de λ.

2. Soit f_λ l'endomorphisme induit par f dans $\mathcal{C}_\lambda$. Alors

$p_{f_\lambda}(x) = (-1)^m (x - \lambda)^m$.

•• *Démonstration.* On peut écrire $p_f(x) = (x - \lambda)^m q(x)$ où $q(x)$ est premier avec $(x - \lambda)$ (ce qui est équivalent à $q(\lambda) \neq 0$).

Vu que $(f_\lambda - \lambda Id)^m = 0$, on a $p_{f_\lambda}(x) = (-1)^k (x - \lambda)^k$, où k est la dimension de $\mathcal{C}_\lambda$. Par le lemme des noyaux, $E = \mathcal{C}_\lambda \bigoplus E'$, ou $E' = Kerq(f)$ est stable par f. Donc $p_f(x) = p_{f_\lambda}(x)p_{f'}(x)$ où f' est l'endomorphisme induit par f dans E'. Mais λ n'est pas une valeur propre de f' (tous les vecteurs propres associés à λ appartiennent à $\mathcal{C}_\lambda$), donc $p_{f'}(\lambda) \neq 0$. Par conséquent, $p_(f_\lambda)(x) = \pm(x - \lambda)^m$ et $k = m$. ••

.

Remarque. Le fait que $(f_\lambda - \lambda Id)^m = 0$ peut s'exprimer ainsi:

$f_\lambda = \lambda Id + \mathbf{n}_\lambda$, où $\mathbf{n}_\lambda$ est un endomorphisme nilpotent ($\mathbf{n}_\lambda = f_\lambda - \lambda Id$).

.

Le cas du polynôme caractéristique scindé: soit

$p_f(x) = (-1)^n (x - \lambda_1)^{m_1} ... (x - \lambda_k)^{m_k}$.

En combinant le théorème de Cayley-Hamilton avec le lemme des noyaux on obtient:

4.4. Corollaire. Si le polynôme caractéristique de f est scindé, l'espace E se décompose en somme directe des sous-espaces caractéristiques de f: $E = \bigoplus_i \mathcal{C}_i$, la dimension de $\mathcal{C}_i$ est égale à la multiplicité m_i. Soit f_i l'endomorphisme induit dans $\mathcal{C}_i$. On a $f_i = \lambda_i Id + \mathbf{n}_i$, où $\mathbf{n}_i$ est nilpotent: $\mathbf{n}_i^{m_i} = 0$.

.

Remarque. L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si p_f est scindé et chaque sous-espace caractéristique est un espace propre.

.

4.5. Projecteurs spectraux. Soit $E = \bigoplus_i \mathcal{C}_i$. Soit Π_i la projection sur le sous-espace caractéristique $\mathcal{C}_i$ parallèlement à la somme des autres sous-espaces caractéristiques. On appelle Π_i **projecteur spectral**.

.

Si f est diagonalisable, on peut écrire $f = \sum_i \lambda_i \Pi_i$.

.

Pour calculer Π_i on écrit $p_f(x) = (x-\lambda_i)^{m_i} q(x)$ où $q(x)$ est premier avec $(x-\lambda_i)$ (ce qui est équivalent à $q(\lambda_i) \neq 0$). Par la formule de Bézout, on peut trouver des polynômes $r(x)$ et $s(x)$ tels que $(x-\lambda_i)^{m_i} r(x) + q(x)s(x) = 1$.

[On peut s'arranger pour que deg $(s) < m_i$ et deg $(r) <$ deg(q)].

4.6. Lemme. $\Pi_i = q(f)s(f)$.

•• *Démonstration.* Rappelons que $\bigoplus_{j:j\neq i} \mathcal{C}_j = Ker(q(f))$ (lemme des noyaux). On a $(f-\lambda_i Id)^{m_i} r(f) + q(f)s(f) = Id$, donc $(f-\lambda_i Id)^{m_i} r(f)v + q(f)s(f)v = v$ pour tout $v \in E$. Si $v \in \mathcal{C}_i = Ker((f-\lambda_i Id)^{m_i}$, cela donne $q(f)s(f)v = v$. Si $v \in Ker(q(f))$, on a $q(f)s(f)v = 0$. ••

.

Exemple. Soit λ une racine simple: $p_f(x) = (x-\lambda)q(x)$ où $q(x)$ est premier avec $(x-\lambda)$ (ce qui est équivalent à $q(\lambda) \neq 0$). Alors la formule de Bézout s'écrit simplement $(x-\lambda)r(x) + aq(x) = 1$ avec $a = \frac{1}{q(\lambda)}$.

Donc le projecteur spectral sur la droite propre $\mathcal{C}_\lambda$ est donné par
$\Pi_\lambda = \frac{1}{q(\lambda)} q(f)$.

.

En particulier, soit dim $E = 3$ et $p_f(x) = -(x-\lambda)(x-\mu)^2$. Alors
$1 = a(x-\mu)^2 + a(2\mu - \lambda - x)(x-\lambda)$, où $a = (\lambda-\mu)^{-2}$. Donc
$\Pi_\lambda = a(f-\mu Id)^2$ et $\Pi_\mu = Id - \Pi_\lambda = -a(f-(2\mu-\lambda)Id)(f-\lambda Id)$.

.

Les projecteurs Π_i vérifient:
1. $\Pi_1 + ... + \Pi_k = Id$.
2. $\Pi_i^2 = \Pi_i$.
3. $\Pi_i \Pi_j = 0$ si $i \neq j$.

.

Remarques. 1) Si Π est un projecteur et $\Pi f = f\Pi$, alors $\mathrm{Ker}(\Pi)$ et $\mathrm{Im}(\Pi)$ sont des sous-espaces supplémentaires stables par f.

2) Si $E_\lambda \neq \mathcal{C}_\lambda$, alors E_λ n'admet pas de sous-espace supplémentaire stable par f.

.

Décomposition de Dunford.

Supposons que le polynôme caractéristique de f est scindé.

Soit f_i l'endomorphisme induit dans $\mathcal{C}_i$. On a $(f_i - \lambda_i Id)^{m_i} = 0$, donc $f_i = \lambda_i Id + \mathbf{n}_i$, où $\mathbf{n}_i^{m_i} = 0$, donc $\mathbf{n}_i$ est nilpotent.

En utilisant cette décomposition, définissons deux endomorphismes,

$\mathbf{d}$ et $\mathbf{n}$: si $v \in \mathcal{C}_i$, on pose $\mathbf{d}(v) = \lambda_i v$ et $\mathbf{n}(v) = \mathbf{n}_i(v)$. Donc $f = \mathbf{d} + \mathbf{n}$.

En utilisant les projecteurs spectraux, on écrit $\mathbf{d} = \sum_i \lambda_i \Pi_i$ et $\mathbf{n} = f - \mathbf{d}$. Vu que Π_i est un polynôme en f, on en déduit que $\mathbf{d}$ et $\mathbf{n}$ sont des polynômes en f.

En résumé, $f = \mathbf{d} + \mathbf{n}$ où $\mathbf{d}$ est diagonalisable, $\mathbf{n}$ est nilpotent et $\mathbf{d}$ commute avec $\mathbf{n}$.

4.7. Théorème. (Décomposition de Dunford.) Si le polynôme caractéristique de f est scindé, f se décompose en somme $f = \mathbf{d}+\mathbf{n}$ où $\mathbf{d}$ est diagonalisable, $\mathbf{n}$ est nilpotent et $\mathbf{d}$ commute avec $\mathbf{n}$. Une telle décomposition est unique.

.

Remarque. Vu que $f = \mathbf{d} + \mathbf{n}$, les trois propriétés: (i) $\mathbf{d}$ commute avec $\mathbf{n}$, (ii) $\mathbf{d}$ commute avec f et (iii) $\mathbf{n}$ commute avec f sont équivalentes.

.

•• *Démonstration de l'unicité.* Soit $f = \mathbf{d}' + \mathbf{n}'$ une deuxième décomposition. On a $\mathbf{d} - \mathbf{d}' = \mathbf{n}' - \mathbf{n}$.

Noter que $\mathbf{d}$ et $\mathbf{d}'$ commutent avec f.

Montrons que $\mathbf{d}$ commute avec $\mathbf{d}'$. En effet, $\mathbf{d}'$ commute avec les projecteurs spectraux parce que chaque Π_i est un polynôme de f, donc $\mathbf{d}'$ commute avec $\mathbf{d} = \sum_i \lambda_i \Pi_i$.

Par conséquent, $\mathbf{d}$ et $\mathbf{d}'$ sont simultanément diagonalisable et donc $\mathbf{d} - \mathbf{d}'$ est diagonalisable.

Du fait que $\mathbf{d}$ commute avec $\mathbf{d}'$ on déduit que $\mathbf{n}$ commute avec $\mathbf{n}'$ (parce que $\mathbf{n} = f - \mathbf{d}$ et $\mathbf{n}' = f - \mathbf{d}'$). Alors on vérifie immédiatement que $\mathbf{n}' - \mathbf{n}$ est nilpotent.

L'égalité entre $\mathbf{d} - \mathbf{d}'$ diagonalisable et $\mathbf{n}' - \mathbf{n}$ nilpotent implique

$\mathbf{d} - \mathbf{d}' = \mathbf{n}' - \mathbf{n} = 0$. ••

.

Remarque. 1) On a $p_f(x) = p_{\mathbf{d}}(x)$.

2) f est diagonalisable si et seulement si $\mathbf{n} = 0$.

Polynôme minimal.

Définition. Un **polynôme minimal** de f est un polynôme annulateur non-nul de degré minimum.

4.8. Proposition. *Un polynôme minimal divise tout polynôme annulateur.*

•• *Démonstration.* Soit b un polynôme minimal et a un polynôme annulateur. La division avec reste donne $a = qb + r$, donc $r = a - qb$, donc r est un polynôme annulateur de degré inférieur à celui de b, donc $r = 0$. ••

.

Par conséquent, il y a un seul polynôme minimal **unitaire** (de coefficient dominant 1), appelé **le** polynôme minimal; il sera noté m_f.

.

En particuler, *le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique.*

.

Exemple: soit f diagonalisable, $\lambda_1, ..., \lambda_k$ les valeurs propres de f deux à deux distinctes. Alors le polynôme $r(x) = (x - \lambda_1)...(x - \lambda_k)$ annule f et en fait $r(x)$ est le polynôme minimal de f.

.

4.9. Critère de diagonalisabilité. *Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.*

•• *Démonstration.* Si f est diagonalisable, f est annulé par un polynôme q scindé à racines simples; le polynôme minimal divise q et donc est aussi scindé à racines simples. Réciproquement, si le polynôme minimal est scindé à racines simples, la Proposition 3.4 s'applique. ••

.

4.10. Proposition. 1. Les racines du polynôme minimal sont exactement les valeurs propres.

2. Le polynôme minimal est scindé si et seulement si le polynôme caractéristique est scindé.

•• *Démonstration.* 1. Chaque valeur propre est racine de tout polynôme annulateur. De l'autre côté, soit α une racine de m_f, donc

$m_f(x) = (x - \alpha)q(x)$. Si α n'est pas une valeur propre, l'endomorphisme $(f - \alpha Id)$ est inversible et donc la relation $m_f(f) = (f - \alpha Id)q(f) = 0$ entrainerait $q(f) = 0$ ce qui contredit le fait que m_f est minimal.

2. Dans les deux cas, être scindé dans R est équivalent aux fait que toutes les valeurs propres sont réelles. ••

.

Exemple: soit f un endomorphisme nilpotent; son polynôme caractéristique est $p_f(x) = (-1)^n x^n$ ($n =$dim(E)) et le polynôme minimal est $m_f(x) = x^k$, où k est l'indice de nilpotence de f.

.

4.11. Lemme. Soit E la somme directe des sous-espaces stables, $E = E_1 \bigoplus ... \bigoplus E_k$; soit f_i l'endomorphisme induit dans E_i. Alors pour le polynôme minimal on a

$m_f = ppcm(m_{f_1}, ..., m_{f_k})$.

•• *Démonstration.* Un polynôme $q(x)$ annule f si et seulement si $q(f_i) = 0$, $i = 1, ..., k$, donc si et seulement si q est divisible par tous les m_{f_i}. ••

4.12. Corollaire. Si $m_f(x) = (x - \lambda_1)^{l_1} ... (x - \lambda_k)^{l_k}$, alors l_i est l'indice de nilpotence de $f_i - \lambda_i Id$ dans le sous-espace caractéristique $\mathcal{C}_i$. En particulier, $\mathcal{C}_i = Ker(f - \lambda_i Id)^{l_i}$.

.

Calcul du polynôme minimal: on cherche l tel que la famille $Id, f, f^2, ..., f^{l-1}$ est libre dans l'espace des endomorphismes, mais $Id, ff^2, ..., f^{l-1}, f^l$ est liée, donc $a_0 Id + a_1 f + ... + a_{l-1} f^{l-1} + f^l = 0$. Alors

$m_f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_{l-1} x^{l-1} + x^l$.

.

Voici quelques résultats supplémentaires (sans démonstration).

.

Théorème. Le polynôme minimal de f est égal (au signe près) à son polynôme caractéristique si et seulement si f est "cyclique": il existe un vecteur v tel que la famille $v, f(v), f^2(v), ..., f^k(v), ...$ engendre E (dans ce cas $v, f(v), f^2(v), ..., f^{n-1}(v)$ sera une base de E, où $n = \dim E$).

.

4.11. Théorème. Si deux matrices réelles sont semblables dans $\mathbf{C}$ ($A = P^{-1}BP$ avec P complèxe), elles sont semblables dans $\mathbf{R}$ ($A = Q^{-1}BQ$ avec Q réelle).

Théorème. Toute matrice est semblable à sa transposée.