Sous-espaces stables. Décomposition en blocs.

.

Définition. Soit $f : E \to E$ un endomorphisme. Un sous-espace F de E est **stable** ou **invariant** par f si $f(F) \subset F$, (donc, si pour tout $v \in F$ on a $f(v) \in F$).

A noter: Ker(f) et Im(f) sont des sous-espaces stables par f.

2.10. Lemme. Si g commmute avec f, $fg = gf$, alors Ker(g) et Im(g) sont des sous-espaces stables par f.

[En particulier, on peut prendre $g = a_0 Id + a_1 f + ... + a_k f^k$.]

• • *Démonstration.* Si $v \in Ker(g)$ on a $g(f(v)) = f(g(v)) = 0$ donc $f(v) \in Ker(g)$.

Si $v \in Im(g)$, alors $v = g(u)$ et $f(v) = f(g(u)) = g(f(u))$, donc

$f(v) \in Im(g)$. • •

Si F est stable par f, on définit **l'endomorphisme unduit** $f_F : F \to F$ par $f_F(v) = f(v)$ si $v \in F$. Dans une base de E où les premiers vecteurs forment une base de F la matrice A de f est triangulaire par blocs.

Rappel: Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants des blocs diagonaux.

2.11. Corollaire. Le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit f_F divise le polynôme caractéristique de f.

• • *Démonstration.* Le premier bloc diagonal de A est la matrice de f_F. Donc le polynôme caractéristique de f est le produit du polynôme caractéristique de f_F et du polynôme caractéristique de l'autre bloc diagonal de A. • •

Soit E la somme directe des sous-espaces stables par f, $E = E_1 \bigoplus ... \bigoplus E_k$; soit f_i l'endomorphisme induit dans E_i. Alors l'étude de f se réduit à l'étude de chaque f_i séparement: f est une sorte la "somme directe" des f_i. La matrice de f dans une base adaptée est diagonale par blocs, le i-ème bloc diagonal étant la matrice de f_i. Un des objectifs de la réduction est de décomposer f en blocs de taille minimum (blocs"indécomposables").

Remarque. Si E est la somme directe des sous-espaces stables par f, $E = E_1 \bigoplus ... \bigoplus E_k$, le polynôme caractéristique de f est le produit des polynômes caractéristiques des endomorphismes f_i induits dans E_i $(i = 1, ..., k)$.

Donc la décomposition de f en blocs est liée à la factorisation du polynôme caractéristique de f.

.

Espaces propres

Définition. Soit $\lambda \in K$. Le sous-espace

$E_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda Id) = \{v \in E : f(v) = \lambda v\}$ s'appelle **l'espace propre associé à** λ. (Noter que $E_0 = \text{Ker}\ (f)$).

Si λ n'est pas une valeur propre, $E_\lambda = \{0\}$.

Evidemment, E_λ est **stable** par f.

On a vu qu'un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si ses vecteurs propres engendrent tout l'espace E. Autrement dit, un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si E est la somme de ses espaces propres.

Le théorème 1.3 (des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont linéairement indépendants) peut être reformulé de façon suivante:

2.12. Théorème. Les espaces propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont en somme directe.

2.13. Corollaire. Un endomorphisme est **diagonalisable** si et seulement si la somme des dimensions de ses espaces propres est égale à $\dim(E)$. (Rappelons que $\dim(E) < \infty$.)

2.14. Proposition. La dimension de l'espace propre E_λ ne dépasse pas la multiplicité de λ dans le polynôme caractéristique.

• • *Démonstration.* L'endomorphisme $\widetilde{f}$ induit par f dans E_λ est proportionnel à l'identité: $\widetilde{f} = \lambda Id$. Donc $p_{\widetilde{f}}(x) = (-1)^k(x-\lambda)^k$, où $k = dim(E_\lambda)$. Pour conclure, il suffit de se rappeler que $p_{\widetilde{f}}(x)$ divise $p_f(x)$. • •

2.15. Corollaire. Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si p_f est scindé et la dimension de chaque espace propre E_λ est égale à la multiplicité de λ.

• • *Démonstration.* $E = E_{\lambda_1} \bigoplus ... \bigoplus E_{\lambda_s}$ si et seulement si

$dim(E) = dim(E_{\lambda_1}) + ... + dim(E_{\lambda_s})$. Mais

$dim(E_{\lambda_i}) \leq mult(\lambda_i)$ et $mult(\lambda_1) + ... + mult(\lambda_s) = dim(E)$, d'où le résultat. • •

.

3. Polynômes annulateurs

Les polynômes annulateurs donnent un moyen de vérifier si un endomorphisme est diagonalisable et, de l'autre côté, de le réduire en décomposant l'espace vectoriel en blocs invariants.

Polynômes d'un endomorphisme. Soit f un endomorphisme de E et $q \in K[x]$: $q(x) = a_0 + a_1x + ... + a_kx^k$.

On note $q(f) = a_0Id + a_1f + ... + a_kf^k$ - un polynôme de f.

Tous les polynômes de f commutent entre eux.

.

Remarques: **1.** Si λ est une valeur propre de f, alors $q(\lambda)$ est une valeur propre de $q(f)$: si $f(v) = \lambda v$, alors $q(f)(v) = q(\lambda)v$.

2. $\ker q(f)$ est un sous-espace invariant par f.

3.1. Définition. Un polynôme q est dit **annulateur** de f si $q(f) = 0$. (on dit aussi que q annule f ou que f annule q).

Donc si $q(f) = 0$ et λ est une valeur propre de f, alors $q(\lambda) = 0$: **chaque valeur propre de f est une racine de tout polynôme annulateur.**

.

La relation $q(f) = a_0 Id + a_1 f + ... + a_k f^k = 0$ signifie que la famille $(Id, f, f^2, ..., f^k)$ est liée dans l'espace des endomorphismes de E.

En dimension finie, il y a toujours des polynômes annulateurs non-nuls. En effet, soit dim $(E) = n$; la suite $Id, f, f^2, ..., f^{n^2}$ de n^2+1 endomorphismes est liée parce que la dimension de l'espace des endomorphismes est n^2. Donc il y a forcement des polynômes annulateurs de degré $\leq n^2$. On verra qu'en fait il y a des polynômes annulateurs de degré $\leq n$ (conséquence du théorème de Cayley - Hamilton).

.

Remarque: si $a_0 Id + a_1 f + ... + a_k f^k = 0$ et $a_0 \neq 0$, alors f est inversible: $f(a_1 Id + ... + a_k f^{k-1}) = -a_0 Id$, et $f^{-1} = -(a_1 Id + ... + a_k f^{k-1})/a_0$.

.

3.2. Exemple: cas diagonalisable. Soit f diagonalisable, soit $\lambda_1, ..., \lambda_k$ les valeurs propres de f deux à deux distinctes. Alors le polynôme $r(x) = (x - \lambda_1).(x - \lambda_k)$ annule f; en fait $r(x)$ est le radical du polynôme caractéristique de f.

Rappeleons que l'on peut déterminer le radical $r(x) = (x - \lambda_1)...(x - \lambda_k)$ à partir de p_f sans calculer les valeurs propres: $r = \pm \frac{p_f}{pgcd(p_f, p'_f)}$.

Le résultat suivant (la réciproque de la propriété précédente) permet de déterminer si f est diagonalisable sans passer par le calcul des valeurs propres:

Proposition. Si le radical $r(x)$ du polynôme caractéristique $p_f(x)$ est scindé et annule f, l'endomorphisme f est diagonalisable.

.

Le lemme suivant ("lemme des noyaux"), qui est la cléf de la réduction dans le cas général, nous permettra de décomposer E en somme directe des sous-espaces stables.

.

3.3. Lemme des noyaux. Soit p un polynôme annulateur de f. Soit $p(x) = p_1(x)...p_k(x)$, où $p_1, ..., p_k$ sont des polynômes deux à deux premiers entre eux. Alors

$$E = Ker(p_1(f)) \bigoplus ... \bigoplus Ker(p_k(f)).$$