

Réduction des endomorphismes.

Diagonalisation

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur K et f un endomorphisme de E . Le but de réduction est de chercher des bases dans E dans lesquelles la forme de la matrice associée à f est la plus simple possible. Si f est déjà donné par une matrice $A = (f)_B$ dans une base B , il s'agit de passer à une autre base B' de façon à ce que la nouvelle matrice $A' = (f)_{B'} = P^{-1}AP$ soit "simple".

La forme la plus simple d'une matrice est la forme diagonale.

1.1. Définition: Un endomorphisme est **diagonalisable** si il admet une base dans laquelle sa matrice est diagonale.

Vecteurs propres, valeurs propres

Si $B = (e_1, \dots, e_n)$ alors $(f)_B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ signifie que $f(e_i) = \lambda_i e_i, i = 1, \dots, n$.

1.2. Définition: Un **vecteur propre** de f est vecteur **non-nul** v tel que $f(v)$ est colinéaire à v : $f(v) = \lambda v$; le coefficient de proportionalité λ est la **valeur propre** associée. Un scalaire λ est une **valeur propre** de f s'il existe un vecteur non-nul v tel que $f(v) = \lambda v$.

La matrice de l'endomorphisme dans une base de vecteurs propres est diagonale, avec les valeurs propres sur la diagonale principale.

Une reformulation de la définition de la diagonalisabilité:

1.1bis. Définition: Un endomorphisme est **diagonalisable** si il existe une base de vecteurs propres.

L'ensemble des valeurs propres de f s'appelle **spectre** de f .

Remarque. Si v est un vecteur propre, tout vecteur non-nul colinéaire à v est aussi un vecteur propre (avec la même valeur propre).

1.3. Théorème. *Des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont linéairement indépendants.*

• • *Démonstration.* Soit $f(v_i) = \lambda_i v_i, i = 1, \dots, n$ et $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$.

Supposons par absurde que la famille v_1, \dots, v_n est liée. Soit k tel que les vecteurs v_1, \dots, v_k sont linéairement indépendants et v_1, \dots, v_k, v_{k+1} sont liés. Donc

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i \dots \dots \dots (*) \\ \text{On a } f(v_{k+1}) &= \sum_{i=1}^k \alpha_i f(v_i), \text{ donc} \\ \lambda_{k+1} v_{k+1} &= \sum_{i=1}^k \alpha_i \lambda_i v_i \dots \dots \dots (***) \\ \text{On multiplie l'égalité } (*) &\text{ par } \lambda_{k+1}: \\ \lambda_{k+1} v_{k+1} &= \sum_{i=1}^k \lambda_{k+1} \alpha_i v_i \dots \dots \dots (***) \end{aligned}$$

et on soustrait (**) de (***) . Cela donne

$$0 = \sum_{i=1}^k \alpha_i (\lambda_{k+1} - \lambda_i) v_i$$

On note que $\lambda_{k+1} - \lambda_i \neq 0$ et que parmi les coefficients α_i il y a des coefficients non-nuls (voir (*)).

Par conséquent, les vecteurs v_1, \dots, v_k sont liés. Cela donne une contradiction à l'hypothèse de départ. • •

1.4. Corollaire. Soit $n = \dim(E) < \infty$. Alors

1. f admet au plus n valeurs propres.
2. Si f admet exactement n valeurs propres (deux à deux distinctes), f est diagonalisable.

• • *Démonstration.*

1. Le nombre de vecteurs de E linéairement indépendants ne dépasse pas la dimension de E .

2. Les n vecteurs propres associés sont linéairement indépendants et donc forment une base de E . • •

Exemples des endomorphismes non-diagonalisables. Soit f un endomorphisme nilpotent: il existe $k > 0$ tel que $f^k = 0$. Si $f(v) = \lambda v$, alors $f^k(v) = \lambda^k v = 0$, donc $\lambda = 0$. Par conséquent, un endomorphisme nilpotent non-nul n'est pas diagonalisable.

A la recherche des vecteurs propres: polynôme caractéristique.

Soit $\dim(E) < \infty$. On remarque que λ est une valeur propre si et seulement si $f - \lambda Id$ n'est pas injectif: $\text{Ker}(f - \lambda I) \neq \{0\}$. En dimension finie cette condition est équivalente à l'annulation du déterminant:

$\det(f - \lambda Id) = 0$. C'est l'**équation caractéristique** pour les valeurs propres.

[Rappel: $\det(f - \lambda Id)$ est défini comme $\det((f)_B - \lambda I_n)$ par rapport à une base B ; noter que I_n est la matrice de l'identité Id dans n'importe quelle base.]

1.5. Définition. Le déterminant $p_f(x) = \det(f - xId)$ s'appelle **polynôme caractéristique** de f : c'est un polynôme en x de degré $n = \dim(E)$.

On conclut que **les valeurs propres sont précisément les racines du polynôme caractéristique.**

[Parfois on définit le polynôme caractéristique comme

$$\det(xId - f) = (-1)^n p_f(x).]$$

Le polynôme caractéristique d'une matrice A est $p_A(x) = \det(A - xI_n)$. Les matrices semblables A et $P^{-1}AP$ ont le même polynôme caractéristique.

Remarque: on a $p_{f+aId}(x) = p_f(x - a)$. Si f est diagonalisable, $f + aId$ l'est aussi ($a \in K$); les valeurs propres de $f + aId$ s'obtiennent en ajoutant a aux valeurs propres de f . (Par conséquent, une matrice triangulaire avec les mêmes éléments sur la diagonale est diagonalisable seulement si elle est déjà diagonale.)

1.6. Polynôme caractéristique d'une matrice diagonale: si

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \text{ alors } p_A(x) = (-1)^n \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i).$$

Donc une condition nécessaire pour que f soit diagonalisable est que p_f soit scindé (vérifiée automatiquement si $K = \mathbf{C}$). Voici une condition suffisante:

1.7. Corollaire. Si p_f admet n racines distinctes (donc p_f est scindé à racines simples), f est diagonalisable.

• • *Démonstration.* Voir le Corollaire 1.4. • •

Remarque: Un polynôme "générique" n'a pas de racines multiples, donc un polynôme "générique" dans \mathbf{C} admet n racines distinctes et un endomorphisme "générique" f est diagonalisable sur \mathbf{C} .

1.8. Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire:

Le déterminant d'une matrice triangulaire et le produit de ses éléments diagonaux, donc pour le polynôme caractéristique on a

$$p_A(x) = (-1)^n \prod_{i=1}^n (x - a_{ii}).$$

1.9. Exemple en dimension 2.

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\text{Alors } p_A(x) = x^2 - (a + d)x + (ad - bc) = x^2 - \text{tr}(A)x + \det(A).$$

$$\text{Les valeurs propres sont } \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}((a + d) \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}).$$

Soit $\Delta = (a - d)^2 + 4bc$ le discriminant.

1. $K = \mathbf{C}$. Si $\Delta \neq 0$, on a deux valeurs propres distinctes et A est diagonalisable. On peut écrire les vecteurs propres comme $v_k = \begin{pmatrix} b \\ \lambda_k - a \end{pmatrix}$

$$\text{ou } v_k = \begin{pmatrix} \lambda_k - d \\ c \end{pmatrix}, k = 1, 2.$$

2. $K = \mathbf{R}$. Si $\Delta > 0$, on a deux valeurs propres **réelles** distinctes et A est diagonalisable (sur \mathbf{R}).

Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de racines réelles et A n'est diagonalisable sur \mathbf{R} .
 On peut réduire A par similitude à la forme $A' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ où $\alpha = (a+d)/2$ et $\beta = \sqrt{-\Delta}/2$.

• • En effet, soit $\lambda = \alpha + i\beta$ et $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ les valeurs propres de A et w et \bar{w} des vecteurs propres associés: $Aw = \lambda w$ et $A\bar{w} = \bar{\lambda}\bar{w}$.

Les vecteurs w et \bar{w} forment une base de \mathbf{C}^2 .

Soit $w = u + iv$ avec $u, v \in \mathbf{R}^2$; les vecteurs u et v forment une base de \mathbf{R}^2 .

Séparant la partie réelle et la partie imaginaire dans l'égalité

$A(u + iv) = (\alpha + i\beta)(u + iv)$ on obtient

$Au = \alpha u - \beta v$ et $Av = \beta u + \alpha v$. • •

Si $\Delta = 0$, on a une racine double et A est diagonalisable si et seulement si A est déjà diagonale.

1.10. Structure du polynôme caractéristique

Théorème. Soit

$$p_A(x) = \det(A - xI_n) = (-1)^n x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_{n-1} x + c_n$$

1. Les coefficients c_1, \dots, c_n sont des polynômes en éléments matriciels a_{ij} de A ; c_k est un polynôme homogène de degré k .

2. $c_1 = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}) = (-1)^{n-1} \text{trace}(A)$

3. $c_n = \det(A)$.

4. c_k est invariant par similitude: c_k est le même pour A et $P^{-1}AP$.

Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire par blocs.

1.11. Lemme. Le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des polynômes caractéristiques des blocs diagonaux: si les blocs diagonaux sont A_1, \dots, A_k , alors

$$p_A(x) = p_{A_1}(x) \dots p_{A_k}(x).$$

[Cette propriété utile est la conséquence directe de la propriété suivante du déterminant: Soit A une matrice triangulaire par blocs avec k blocs diagonaux A_1, \dots, A_k . Alors $\det A = \det A_1 \cdot \dots \cdot \det A_k$.]