La méthode du pivot.

La méthode du pivot (ou méthode d'élimination de Gauss) fournit un algorithme simple et pratique pour résoudre plusieurs problèmes d'algèbre linéaire, tels que:

- résoudre un système d'équations linéaires;
- calculer le déterminant d'une matrice;
- calculer la matrice inverse;
- calculer le rang d'une matrice;
- calculer le rang d'une famille de vecteurs;
- déterminer si les vecteurs sont linéairement indépendants.

.

1. Le rang et le déterminant d'une matrice.

Soit A une matrice $n \times p$:

.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots\ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1} \ldots\ldots a_{pn} \end{pmatrix}$$

.

Opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A:

1) Echanger deux lignes.
2) Ajouter à une ligne un multiple d'une autre ligne.
3) Multiplier une ligne par un scalaire non-nul.

Soit $\mathbf{c_1}, ..., \mathbf{c_n} \in \mathbf{K^p}$ les colonnes de A et $\mathbf{l_1}, ..., \mathbf{l_p} \in \mathbf{K^n}$ les lignes de A donc $\mathbf{l_i} = (\mathbf{a_{i1}}, ..., \mathbf{a_{in}})$.

.

Première étape.

1: Soit $\mathbf{c_j}$ la première colonne non-nulle de A (donc $a_{ik} = 0$ si $k < j$). Quitte à échanger deux lignes, on peut supposer que $a_{1j} \neq 0$.

2: On modifie les lignes $\mathbf{l_2}, ..., \mathbf{l_n}$ de A: $\mathbf{l_i} \rightarrow \mathbf{l_i'} = \mathbf{l_i} - \frac{\mathbf{a_{ij}}}{\mathbf{a_{1j}}}\mathbf{l_1}$.

Ensuite dans le système obtenu on supprime la première ligne et les j premières colonnes , ce qui donne la matrice A_1 de dimension $(n-j)\times(p-1)$ et on recommence la même procédure avec la matrice A_1 (récurrence).

A la fin on obtient une matrice **échelonnée** (ou "en escalier") en lignes, dont les lignes commencent par un nombre de zéros **strictement croissant** à mesure que l'indice augmente. (Si la i-ème ligne commence par k zéros, la $i+1$-ème ligne commence par au moins $k+1$ zéros et on a toujours $k > i$.) Les premiers coefficients non-nuls des lignes non-nulles s'appellent **pivots**.

Déterminant. $(n = p)$.

Si à la première étape d'élimination on rencontre un pivot qui n'est pas sur la diagonale, le déterminant est nul.

Sinon dans la matrice échélonnée tous les pivots sont sur la diagonale et le déterminat est leur produit **au signe près** (chaque échange des lignes change le signe du déterminant).

.

Deuxième étape.

En permutant les colonnes si nécessaire, on peut placer le $i-$ème pivot dans la $i-$ème colonne de façon à ce que la i-ème ligne commence par exactement $i-1$ zéros.

.

Troisième étape.

On peut aller plus loin: on applique la procédure d'élimination en commençant par le dernier pivot et en remontant vers la permière ligne. De cette façon on peut annuler tous les coefficients au dessus des pivots. Finalement, en divisant par les pivots on peut faire tous les pivots égals à 1 (on aurait pu le faire dès le début).

La matrice qui résulte s'écrit en termes des blocs:

$$\begin{pmatrix} I_r; C \\ \\ 0\ ; 0 \end{pmatrix}$$

Ici I_r est la matrice identité $r \times r$ et C est un bloc $(n-r \times r)$.

.

Le rang .

Soit $\mathbf{l_1}, ..., \mathbf{l_p} \in K^n$ les lignes de la matrice A et $\mathbf{c_1}, ..., \mathbf{c_n} \in K^p$ ses colonnes.

Lemme. **a)** Les opérations élémentaires sur les lignes de A ne changent pas le sous-espace $Vect(\mathbf{l_1}, ..., \mathbf{l_p})$ donc laissent le rang de la famille $(\mathbf{l_1}, ..., \mathbf{l_p})$ inchangé. Les opérations élémentaires sur les colonnes de A agissent sur les lignes de A comme des changements élémentaires de base dans K^n, donc laissent le rang de la famille $(\mathbf{l_1}, ..., \mathbf{l_p})$ inchangé.

.

b) Symétriquement, les opérations élémentaires sur les colonnes de A ne changent pas le sous-espace $Vect(\mathbf{c_1}, ..., \mathbf{c_n})$ donc laissent le rang de la famille $(\mathbf{c_1}, ..., \mathbf{c_n})$ inchangé. Les opérations élémentaires sur les lignes de A agissent sur les colonnes de A comme des changements élémentaires de base dans K^p, donc laissent le rang de la famille $(\mathbf{c_1}, ..., \mathbf{c_n})$ inchangé.

Conclusion: le rang de la famille des lignes ainsi que celui des colonnes reste inchangé en cours de l'application de la méthode du pivot. Pour la matrice finale échelonnée

$$\begin{pmatrix} I_r ; C \\ \\ 0\ ; 0 \end{pmatrix}$$

le rang de la famille des lignes ainsi que celui des colonnes est évidemment égal à r, le nombre de pivots.

Corollaire. Pour toute matrice le rang de la famille des lignes est égal à celui des colonnes.

.

Corollaire.

Les colonnes contenant les pivots forment une base de $Vect(\mathbf{c_1}, ..., \mathbf{c_n})$. Symétriquement, les lignes contenant les pivots forment une base de $Vect(\mathbf{l_1}, ..., \mathbf{l_p})$.

.

Rang d'une famille de vecteurs. Base du sous-espace engendré.

Soit $\mathbf{a_1}, ..., \mathbf{a_p}$ une famille de vecteurs dans K^n.

Le rang de cette famille, dim $Vect(\mathbf{a_1}, ..., \mathbf{a_p})$, est le rang de la matrice A dont $\mathbf{a_1}, ..., \mathbf{a_p}$ sont des lignes. (En particulier, la famille est libre si et seulement si son rang est égal à p.) Pour déterminer une base de l'espace $Vect(\mathbf{a_1}, ..., \mathbf{a_p})$, il suffit d'effectuer la première étape de la méthode du pivot et prendre les lignes qui contiennent les pivots.

.

Comment reconnaitre si un vecteur est une combinaison linéaire d'autres vecteurs?

Déterminer si le vecteur $\mathbf{b}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{c_1}, ..., \mathbf{c_n}$ revient à décider si l'équation $x_1\mathbf{c_1} + ...+x_n\mathbf{c_n} = \mathbf{b}$ admet une solution. Le problème est traité par la méthode du pivot.

On peut aussi remarquer que $\mathbf{b}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{c_1}, ..., \mathbf{c_n}$ si et seulement si le rang de la famille $(\mathbf{c_1}, ..., \mathbf{c_n}, \mathbf{b})$ est le même que le rang de $(\mathbf{c_1}, ..., \mathbf{c_n})$.

.

3. Systèmes d'équations linéaires.

.

On considère un système (S) de p équations linéaires à n inconnues:

.

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ .... \\ a_{p1}x_1 + ... + a_{pn}x_n = b_p \end{pmatrix}$$

.

En termes matriciels le système (S) s'écrit $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en notant

.

$A = \begin{pmatrix} a_{11}.......a_{1n} \\ .... \\ a_{p1}.......a_{pn} \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ .. \\ b_p \end{pmatrix}$.

.

Résourdre (S) c'est trouver tous les vecteurs $(x_1, ..., x_n)$ vérifiant (S).

.

Remarque: Soit $\mathbf{c_1}, ..., \mathbf{c_n} \in \mathbf{K^p}$ les colonnes de A. Le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ s'écrit comme $x_1\mathbf{c_1} + ... + \mathbf{x_n c_n} = \mathbf{b}$. Donc résoudre le système (S) est équivalent au problème suivant: étant donné les vecteurs $\mathbf{c_1}, ..., \mathbf{c_n}$ et $\mathbf{b}$ déterminer si $\mathbf{b}$ est une combinaison linéaire des $\mathbf{c_1}, ..., \mathbf{c_n}$ et si oui, calculer les coefficients de telles combinaisons linéaires.

En particulier, si $n = p$ et $(\mathbf{c_1}, ..., \mathbf{c_n})$ est une base, il s'agit de développer le vecteur $\mathbf{b}$ suivant cette base.

On effectue la procedure d'élimination sur les équations - sur les lignes de la matrice "augmentée" $(A; \mathbf{b})$) - et comme avant on arrive au système réduit qui s'écrit en termes des blocs:

.

$$\begin{pmatrix} I_r; C \\ \\ 0\ ; 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x_1'} \\ \\ \mathbf{x_2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b_1'} \\ \\ \mathbf{b_2'} \end{pmatrix}$$

.

Ici I_r est la matrice identité de rang r, C est une matrice $(n - r) \times r$, $\mathbf{x_1'} = (x_1', ..., x_r')$, $\mathbf{x_2'} = (x_{r+1}', ..., x_n')$, $\mathbf{b_1'} = (b_1', ..., b_r')$, $\mathbf{b_2'} = (b_{r+1}', ..., b_p')$ et $x_1', ..., x_n'$ est une permutation des inconnues $x_1, ..., x_n$ qui résulte des echanges éventuels de colonnes à l'étape 2 de la procédure (pour mettre le i-ème pivot dans la i-ème colonne).

.

Le système se décompose en deux: $\mathbf{x_1'} + \mathrm{C}\mathbf{x_2'} = \mathbf{b_1'}$, et $0 = \mathbf{b_2'}$.

.

L'équation $\mathbf{b_2'} = \mathbf{0}$ est la *condition de compatibilité*, nécessaire et suffisante pour qu'une solution existe. Si elle est satisfaite, les solutions sont données par

$\mathbf{x_1'} = -\mathrm{C}\mathbf{x_2'} + \mathbf{b_1'}$,

où les variables $\mathbf{x_2'} = (x_{r+1}', ..., x_n')$ peuvent être choisis arbitrairement (variables libres) et ce choix détermine $(x_1', ..., x_r')$ (inconnues principales).

.

4. Système de Cramer et la matrice inverse.

Un système de Cramer est un système de n équations linéaires à n inconnues avec la matrice A inversible:

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Ceci est équivalent à dire que pour tout second membre $\mathbf{b}$ le système admet une solution unique.

Dans ce cas $x'_i = x_i$, $i = 1, ..., n$, le bloc C est absent et le nouveau second membre donne tout de suite la solution:

$\mathbf{x} = \mathbf{b}'$.

La connaissance de la matrice inverse A^{-1} est équivalent à la connaissance de la solution de l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pour le second membre $\mathbf{b}$ "arbitraire": $\mathbf{x} = \mathbf{A^{-1}b}$.

Noter que si M est une matrice et e_j est le $j-$ ème vecteur de la base canonique, Me_j est exactement la j -ème colonne de M.

Donc, la j- ème colonne de A^{-1} est la solution du système $A\mathbf{x} = \mathbf{e_j}$. On peut résiudre ce système pour tous les second membres $e_1, ..., e_n$ en même temps par la méthode du pivot. Pour cela on les place tous à côté de A:

$(A; e_1, ..., e_n) = (A; I_n)$

et on applique la procedure d'élimination à cette matrice $(2n \times n)$. A la fin on obtient $(I_n; A^{-1})$.