Exponentielle d'une matrice.

.

Pour toute solution de l'équaton $x'(t) = Ax(t)$ on a $\frac{d^k x(t)}{dt^k} = A^k x(t)$.
La série de Taylot de $x(t)$, $\sum_0^\infty \frac{t^n}{n!} x^{(n)}(0)$ s'écrit donc
$\sum_0^\infty \frac{t^n}{n!} A^n v$, où $v = x(0)$.

.

2.1. Proposition. Soit $A \in M_n(\mathrm{C})$ et $v \in C^n$. La série $\sum_0^\infty \frac{t^n}{n!} A^n v$ converge normalement sur tout intevalle fini de R. La somme de cette série $\varphi(t) = \sum_0^\infty \frac{t^n}{n!} A^n v$ est dérivable par rapport à t et $\frac{d}{dt}\varphi(t) = A\varphi(t)$.

.

En particulier, pour toute matrice A la série $\sum_0^\infty \frac{A^n}{n!}$ converge (absolument).

Définition. La somme de la série

$$e^A = \sum_0^\infty \frac{A^n}{n!}$$

s'appelle l'exponentielle de A.

.

2.2. Corollaire. La série (à coefficients matriciels) $\sum_0^\infty \frac{t^n}{n!} A^n$ converge normalement sur tout intervalle fini. Sa somme e^{tA} est dérivable par rapport à t et $\frac{d}{dt} e^{tA} = Ae^{tA}$.

.

2.3. Corollaire: existence. Pour $v \in K^n$, $\varphi(t) = e^{tA} v$ est une solution de l'équation $x' = Ax$ vérifiant la condition initiale $\varphi(0) = v$.

.

Unicité de la solution. Soit $\varphi(t)$ une solution quelconque vérifiant $\varphi(0) = v$. Posons $\psi(t) = e^{-tA}\varphi(t)$. La dérivation donne $\psi'(t) = 0$, d'où $\psi(t) = v$. Si on prend $e^{tA} v$ comme $\varphi(t)$ on a $e^{-tA} e^{tA} v = v$ ce qui est valable quelque soit v.

Donc $e^{-tA} e^{tA} = Id$, e^{-tA} est l 'inverse de e^{tA}. Finalement,
$\psi(t) = e^{-tA}\varphi(t) = v$ entraine $\varphi(t) = e^{tA} v$.

.

2.4. Corollaire. e^{tA} est l'unique fonction matricielle $U(t)$ vérifiant l'équation $\frac{d}{dt} U(t) = AU(t)$ et la condition initiale $U(0) = Id$.

.

Cas diagonalisable: si $A = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, $e^A = diag(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n})$.

.

Lemme. Changement de base.

$$e^{P^{-1}AP} = P^{-1} e^A P$$

2.5. Lemme. a) Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ les valeurs propres de A. Alors $(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n})$ sont les valeurs propres de e^A.

b) $\det(e^A) = e^{tr(A)}$.

(La démonstration est fait par la trigonalisation.)

.

2.6. Lemme. Si $AB + BA$, on a $e^{A+B} = e^A e^B$.

.

[En pârticulier, e^A est inversible et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.]

.

Démonstration. On note que $AB = BA$ entraine $e^{tA}B = e^{tA}B$. Soit $U(t) = e^{tA}e^{tB}$. Alors

$U'(t) = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB} = (A + B)e^{tA}e^{tB} = (A + B)U(t)$.

En plus $U(0) = Id$. L'unicité entraine que $U(t) = e^{t(A+B)}$. Ensuite on pose $t = 0$.

.

Noter que $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$: la famille $\{e^{tA}\}$ est un "groupe à un paramètre". En particulier, e^{tA} est inversible et $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$.

.

2.7. Cas général. Soit $A = \mathcal{D} + \mathcal{N}$ la décomposition de Dunford et $\mathcal{N}^l = 0$. Alors

$$e^{tA} = e^{t\mathcal{D}+t\mathcal{N}} = e^{t\mathcal{D}}(I + t\mathcal{N} + t^2\mathcal{N}^2/2! + ... + t^l\mathcal{N}^{l-1}/(l-1)!)$$

Utilisation des projecteurs spectraux. Rappeleons que $\mathcal{D} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \Pi_i$, où Π_i est le projecteur spectral sur le sous-espace caractéristique associé à λ_i, et $\mathcal{N} = A - \mathcal{D}$. Alors

$$e^{t\mathcal{D}} = \sum_{i=1}^k e^{\lambda_i t}\Pi_i$$

On en déduit la structure des éléments de e^{tA} en tant que fonctions de t.

.

Remarque. Les colonnes de e^{tA} sont les solutions du système $x' = Ax$ vérifiant les conditions initiales particulières: sa j-ème colonne ψ_j vérifie $\psi_j(0) = e_j$, le j-ème vecteur canonique.

En fait, e^{tA} contient autant d'information que n'importe quelle base des solutions:

2.8. Lemme. (i) Soit $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ une famille des solutions de l'équation $x' = Ax$. Soit $\Phi(t)$ la matrice dont les colonnes sont $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$. Alors $\Phi(t) = e^{tA}\Phi(0)$.

(ii) Soit $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ une base des solutions de l'équation $x' = Ax$. Soit $\Phi(t)$ la matrice dont les colonnes sont $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$. Alors $e^{tA} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}$. [On appelle $\Phi(t)$ une solution (ou une matrice) fondamentale.]

.

Exemple en dimension 2.

Soit le polynôme caractéristique $p_A(z) = z^2 + az + b$.

Cas 1: racines simples $\lambda \neq \mu$. Alors
$\Pi_\lambda = \frac{1}{\lambda-\mu}(A - \mu I)$ et $\Pi_\mu = \frac{1}{\mu-\lambda}(A - \lambda I)$. Ensuite
$e^A = e^\lambda \Pi_\lambda + e^\mu \Pi_\mu = \frac{1}{\lambda-\mu}[(e^\lambda - e^\mu)A - (\mu e^\lambda - \lambda e^\mu)I$.

.

Cas particulier: $a = 0$, alors $\mu = -\lambda$ et on a
$e^A = \frac{1}{2\lambda}(e^\lambda - e^{-\lambda})A + \frac{1}{2}(e^\lambda + e^{-\lambda})I$.

Oscillations harmoniques: si $a = 0$ et en plus $b > 0$, alors λ est imaginaire, $\lambda = i\omega$, et $e^A = \frac{1}{\omega}\sin\omega A + \cos\omega I$. De même,
$e^{tA} = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)A + \cos(\omega t)I$.

.

Cas 2: racine double λ. Alors $A = \lambda I + N$ où N est nilpotente: $N^2 = 0$.
On a $e^A = e^\lambda(I + N)$.

.

Equation non homogène: méthode de la variation des constantes.

.

On considère l'équation non-homogène:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = A\mathbf{x}(t) + b(t)$$

.

2.9. *"Principe de superposition":* **a)** Soit $x' = Ax + b_1$ et $y' = Ay + b_2$. Alors $z(t) = x(t) + y(t)$ vérifie $z' = Az + (b_1 + b_2)$.

b) *Toute solution de l'equation non-homogène $x' = Ax + b(t)$ est la somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène $y' = Ay$.*

On cherche la solution $x(t)$ sous la forme $x(t) = e^{tA}y(t)$. On obtient pour $y(t)$ l'équation $y'(t) = e^{-tA}b(t)$, d'où la solution $y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-sA}b(s)ds$. On remarque que $y(t_0) = e^{-t_0 A}x(t_0)$.

.

2.10. Formule de Duhamel:

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}b(s)ds$$

Dans cette formule $x(t)$ est la somme de deux termes: $u(t) = \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} b(s) ds$ est la solution particulière de l'équation $x' = Ax + b(t)$ vérifiant la condition initiale $u(t_0) = 0$ et $v(t) = e^{(t-t_0)A} x(0)$ est la solution de l'équation homogène vérifiant la condition initiale $v(t_0) = x(t_0)$.

.

2.11. Corollaire: existence et unicité. Soit $b : I \to K^n$ une fonction continue définie sur un intervalle I. Pour tout $x_0 \in K^n$ et $t_0 \in I$ il existe une solution unique $x(t)$ de l'équation $\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = A\mathbf{x}(t) + b(t)$ définie sur I à valeurs dans K^n vérifiant la condition initiale $x(t_0) = x_0$.