3. Espaces affines euclidiens

3.1. Définition. Un espace affine $\mathcal{E}$ est dit **euclidien** s'il est dirigé par une espace vectoriel euclidien E.

On définit la distance dans $\mathcal{E}$ par $d(A, B) = \| \overrightarrow{AB} \|$.

3.2. Définition. Un repère affine $(A_0, a_1, ..., A_n)$ est dit **orthonormé** si la base vectorielle $(\overrightarrow{A_0A_1}, ..., \overrightarrow{A_0A_n})$ est orthonormée.

3.3. Définition. Deux sous-espaces affine $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont **orthogonaux** si leurs espaces directeurs F et G sont orthogonaux.

.

Isométries

3.4. Définition. Soit X un espace métrique. On appelle **isométrie** de X une bijection $f : X \to X$ qui préserve la distance: $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ pour tous $x, y \in X$.

Remarque: les isométris de X forment un groupe par rapport à la composition.

3.5. Théorème. Toute isométrie d'un espace affine euclidien est une application affine.

3.6 Lemme. Une application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une isométrie si et seulement si sa partie linéaire $df : E \to E$ est une isométrie vectorielle.

.

Remarque. Une application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une isométrie si et seulement si f transforme un (ou tout) repère orthonormé en repère orthonormé.

.

3.7. Définition. On appelle **déplacement** ou *isométrie directe* (respectivement, **antidéplacement** ou *isométrie indirecte*) de $\mathcal{E}$ toute isométrie f telle que $\text{dét}(df) = 1$ (respectivement, $\text{dét}(df) = -1$).

Les translations sont évidemment des déplacements. Les déplacements forment un sous-groupe dans $\text{Iso}(\mathcal{E})$ d'indice 2; le produit de deux antidéplacements est un déplacement.

.

3.8. Définition. Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$. La **projection orthogonale** sur $\mathcal{F}$ est la projection affine sur $\mathcal{F}$ parallèlement à $F^\perp$.

La **symétrie orthogonale** par rapport à $\mathcal{F}$ est la symétrie affine par rapport à $\mathcal{F}$ parallèlement à $F^\perp$. Une symétrie orthogonale est une isométrie; elle est directe si et seulement si la codimension de $\mathcal{F}$ est paire (c'est à dire, $dim(\mathcal{E}) - dim(\mathcal{F})$ est paire).

On appelle **reflexion** une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan; une reflexion est une isométrie indirecte (un antidéplacement).

Etant donné deux points A et B de $\mathcal{E}$, il existe une unique réflexion échangeant A et B: c'est la réflexion par rapport à l'hyperplan médiateur du segment $[AB]$.

Vu que toute isométrie vectorièle dans R^n s'écrit comme un produit d'au plus n réflexions, on a :

3.9. Proposition. Toute isométrie affine de $\mathcal{E}$ s'écrit comme un produit d'au plus $n+1$ réflexions ($n = \dim(\mathcal{E})$.)

.

3.10. Définition. Une transformation affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une **similitude** de rapport k si f multiplie toutes les distances par k:

$d(f(x), f(y)) = kd(x, y)$ pour tous $x, y \in \mathcal{E}$.

Une homothétie de rapport k est une similitude de rapport $\mid k \mid$.

Lemme. Une application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une similtude de rapport k si et seulement si sa partie linéaire $df : E \to E$ est une similitude vectorielle: $\parallel df(v) \parallel = \pm k \parallel v \parallel$.

Remarque: les similitudes de $\mathcal{E}$ forment un groupe par rapport à la composition. Si f_i est une similitude de rapport k_i, $i = 1, 2$, alors $f_1 f_2$ est une similitude de rapport $k_1 k_2$.

3.11. Lemme. (i) Toute similitude de rapport $k \neq 1$ admet un point fixe (unique).

(ii) Toute similitude de rapport k est la composée d'une homothetie de rapport k et d'une isométrie.

.

3.12. Lemme. Soit T_v une translation de vecteur v et f une isométrie. Alors $fT_v = T_u f$ où $u = df(v)$. En particulier, T_v et f commutent si et seulement si $df(v) = v$.

.

3.13. Proposition.

Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une isométrie.

(i) Pour tout point $A \in \mathcal{E}$ il y a une unique décomposition $f = T_{\vec{a}} f_A$ où T est une translation de vecteur $\vec{a}$ et f_A une isométrie qui fixe A: $f_A(A) = A$.

(ii) Si df n'admet pas de vecteur fixe non-nul (donc si 1 n'est pas une valeur propre de df), alors f admet un unique point fixe.

.

Chosissons A comme origine, cela donne la bijection entre les points B et les vecteurs $v = \overrightarrow{AB}$. Soit $w = \overrightarrow{Af(B)}$. Alors $\vec{w} = \vec{a} + df(\vec{v})$, où $\vec{a} = \overrightarrow{Af(A)}$. Par rapport à cette vectorialisation f_A s'identifie avec l'application $\vec{v} \to df(\vec{v})$ et $T_{\vec{a}}$ avec $\vec{u} \to \vec{a} + \vec{u}$.

.

3.14 . Proposition. Il existe un point A tel que dans la décomposition $f = T_{\vec{a}} f_A$ on a $T_{\vec{a}} f_A = f_A T_{\vec{a}}$ (ce qui est équivalent à $df(\vec{a}) = \vec{a}$).

Classification des isométries en dimension 2 et 3.

La classification des isométries affines repose sur la classifcation des isométries vectorielles.

Lemme. Soit U une isométrie de l'espace vectoriel E.

1. dim $E = 2$**.** a) dét $U = 1$: U est une rotation.

b) dét $U = -1$: U est une réflexion.

2. dim $E = 3$**.** a) dét $U = 1$: U est une rotation autour d'un axe.

b) dét $U = -1$: U est une réflexion composée avec une rotation autour de l'axe orthogonal au plan de réflexion.

.

Isométries affines du plan

4.1. Proposition. (i) Tout déplacement du plan est une translation ou une rotation autour d'un point; ici la rotation commute avec la translation.

(ii) Toute antidéplacement est le produit d'une réflexion par rapport à une droite avec une translation parallèle à cette droite (une "réflexion-translation"); ici la reflexion commute avec la translation.

.

Isométries affines de l'espace.

4.2. Proposition. (i) Tout déplacement de l'espace est soit une translation soit le produit (commutatif) d'une rotation autour d'un axe et d'une translation parallèle à l'axe de rotation ("vissage").

(ii) Toute antidéplacement est soit le produit (commutatif) d'une réflexion par rapport à un plan avec une translation parallèle à ce plan ("réflexion-translation"), soit le produit (commutatif) d'une réflexion par rapport à un plan avec une rotation autour d'un axe orthogonal à ce plan ("réflexion-rotation").

.

Similitudes planes et nombres complèxes.

On identifie le plan euclidien R^2 avec le plan complèxe $\mathbf{C}$.

4.3. Proposition. Toute similitude directe de $\mathbf{C}$ s'écrit $s(z) = az + b$, avec $a \neq 0$. Toute similitude indirecte s'écrit $s(z) = a\bar{z} + b$, $a \neq 0$.

Le rapport d'une telle similitude est $\mid a \mid$.

En particulier, c'est une isométrie si et seulement si $\mid a \mid = 1$.