

Equations différentielles linéaires aux coefficients constants.
Système de n équations d'ordre 1.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$$

où $\mathbf{x}(t) \in K^n$, $A \in M_n(K)$, $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Une solution est une fonction $\varphi : I \rightarrow K^n$ définie sur un intervalle I et vérifiant $\frac{d}{dt}\varphi(t) = A\varphi(t)$.

Propriétés générales.

1.1. L'ensemble des solutions est un espace vectoriel sur K (conséquence de la linéarité de l'équation). [On verra que sa dimension est n .]

1.2. Si $\varphi(t)$ est une solution et $c \in \mathbb{R}$, alors $\varphi(t+c)$ l'est aussi (conséquence du fait que A est à coefficients constants).

1.3. *Complexification.* Soit A une matrice réelle et $\mathbf{z}(t)$ une solution complexe: $\mathbf{z}' = A\mathbf{z}$, ($\mathbf{z}(t) \in \mathbb{C}^n$). Alors la partie réelle $\mathbf{x}(t) = \text{Re}(\mathbf{z}(t))$ et la partie imaginaire $\mathbf{y}(t) = \text{Im}(\mathbf{z}(t))$ de la solution complexe sont des solutions réelles.

Il est donc utile de chercher dès le début des solutions complexes.

1.4. Chaque vecteur propre v de A , $Av = \lambda v$, engendre une solution "exponentielle": $\varphi(t) = e^{\lambda t}v$. Si A est diagonalisable, une base de vecteurs propres donne n solutions de $x' = Ax$ linéairement indépendantes (et toute autre solution sera leur combinaison linéaire).

1.5. *Changement de base.* Par un changement linéaire des variables, $x = Py$, le système différentiel $x' = Ax$ est transformé en $y' = By$ avec $B = P^{-1}AP$. Pour simplifier le système on cherche à réduire la matrice A à une forme "simple".

Cas diagonalisable. Si A est diagonalisable, $B = P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, le système $y' = By$ est scindé (séparation des variables complète): $y_1' = \lambda_1 y_1$, \dots , $y_n' = \lambda_n y_n$. Toutes ses solutions sont donnés par $y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$, \dots , $y_n(t) = c_n e^{\lambda_n t}$. Remarquons que $c_i = y_i(0)$. On en déduit que pour tout $c = (c_1, \dots, c_n) \in K^n$ il existe une solution unique $y(t)$ définie sur \mathbb{R} vérifiant la condition initiale $y(0) = c$.

Remarque 1. Soit B une matrice qui commute avec A : $AB = BA$. Soit $\varphi(t)$ une solution de $x' = Ax$. Alors $\psi(t) = B\varphi(t)$ est aussi une solution de $x' = Ax$.

Remarque 2. En dérivant l'équation $x'(t) = Ax(t)$ on obtient $x''(t) = A^2x(t)$ et par récurrence $\frac{d^k x(t)}{dt^k} = A^k x(t)$.

Cas général. Quitte à passer au système complexifié, on peut supposer que le polynôme caractéristique $p_A(x)$ est scindé et donc $E = K^n$ se décompose en somme directe des sous-espaces caractéristiques: $E = \bigoplus_i \mathcal{C}_i$. Soit Π_i les projecteurs associés. On a vu que chaque Π_i est un polynôme en A et donc commute avec A .

Alors toute solution $\varphi(t)$ se décompose de façon unique en somme des solutions $\varphi_i(t)$ dans les sous-espaces caractéristiques:

$$\varphi(t) = \sum \varphi_i(t), \text{ où } \varphi_i(t) = \Pi_i \varphi(t) \text{ et } \varphi_i(t) \in \mathcal{C}_i.$$

Il suffit donc d'étudier l'équation $x' = Ax$ dans chaque sous-espace \mathcal{C}_i .

Soit f_i l'endomorphisme induit par A dans \mathcal{C}_i (essentiellement, $f_i(v) = Av$ pour $v \in \mathcal{C}_i$). On sait que $f_i = \lambda_i Id + n_i$ où n_i est nilpotent: $n_i^l = 0$. (Si en plus $n_i^{l-1} \neq 0$, on appelle l l'indice de nilpotence de n_i .) Donc dans \mathcal{C}_i on a l'équation $x'_i = \lambda_i x_i + n_i x_i$. Posons $x_i = e^{\lambda_i t} y$; alors y vérifie $y' = n_i y$. Mais $n_i^l = 0$, donc $\frac{d^l y}{dt^l}(t) = 0$. Cela montre que $y(t)$ est un polynôme en t de degré $< l$: $y(t) = v_0 + tv_1 + \dots + t^{l-1} v_{l-1}$.

On a $\frac{d^k y}{dt^k}(0) = k! v_k$, mais aussi $\frac{d^k y}{dt^k}(0) = n_i^k y(0) = n_i^k v_0$. Donc finalement,

$$v_k = \frac{1}{k!} n_i^k v_0,$$

$$y(t) = v_0 + t n_i v_0 + \dots + \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} n_i^{l-1} v_0 = \left(\sum_{k=0}^{l-1} \frac{t^k}{k!} n_i^k \right) v_0 \text{ et}$$

$$x_i(t) = e^{\lambda_i t} y(t) = e^{\lambda_i t} \left(\sum_{k=0}^{l-1} \frac{t^k}{k!} n_i^k \right) v_0.$$

On conclut que pour tout $v \in \mathcal{C}_i$ il existe une solution unique $x_i(t)$ définie sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathcal{C}_i vérifiant la condition initiale $x_i(0) = v_0$.

En réunissant les composantes x_i , $x(t) = \sum_i x_i(t)$, on a la solution (unique) vérifiant la condition initiale $x(0) = v$:

$$x(t) = \sum_i e^{\lambda_i t} \left(\sum_{k=0}^{l_i-1} \frac{t^k}{k!} n_i^k \right) \Pi_i v.$$

Remarque. Pour calculer $x_i(t)$ il suffit de connaître n_i : on a

$$n_i = (A - \lambda_i Id) \Pi_i.$$

1.6. Théorème d'existence et d'unicité. Pour tout $v \in K^n$ il existe une solution unique $x(t)$ définie sur \mathbb{R} à valeurs dans K^n vérifiant la condition initiale $x(0) = v$.

1.7. Corollaire. L'espace vectoriel \mathcal{S} des solutions de l'équation $x' = Ax$ définies sur \mathbb{R} est de dimension n . Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ l'application $\mathcal{S} \rightarrow K^n$ qui à une solution φ fait correspondre sa valeur $\varphi(t_0)$ est un isomorphisme.

Les conditions suivantes sont équivalentes:

- 1) $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de \mathcal{S} ;
- 2) Pour un t_0 , $(\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0))$ est une base de K^n ;
- 3) Pour tout t , $(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ est une base de K^n .

1.8. Structure des solutions. Le calcul précédent montre que toute composante d'une solution *complexe* $x(t) = \sum_i x_i(t)$ est une somme

$\sum_i q_i(t)e^{\lambda_i t}$ où chaque $q_i(t)$ est un polynôme de degré inférieure à l_i , l'indice de nilpotence de n_i dans \mathcal{C}_i . (l_i est égale à la multiplicité de λ_i dans le polynôme minimal de A).

Toute composante d'une solution *réelle* est donc une somme de termes $q(t)e^{\lambda t}$ (pour les valeurs propres λ réelles) et $r(t)e^{\alpha t} \cos(\beta t) + s(t)e^{\alpha t} \sin(\beta t)$, (pour les valeurs propres λ complexes, où $\lambda = \alpha + \sqrt{-1}\beta$). Les degrés des polynômes $q(t)$, $r(t)$ et $s(t)$ sont inférieures à l'indice de nilpotence associé à λ .

Retour au cas diagonalisable. Si A est diagonalisable, la solution du problème à condition initiale (problème de Cauchy) $x'(t) = Ax(t)$, $x(0) = v$, est simple. On commence par calculer le polynôme caractéristique et ses racines. Pour s'assurer que A est diagonalisable, on écrit le radical

$r(z) = (z - \lambda_1) \dots (z - \lambda_k)$ et on vérifie que $r(A) = 0$. Ensuite on peut organiser le calcul de deux façons:

(a) On trouve une base (v_1, \dots, v_n) de vecteurs propres, on décompose la condition initiale v suivant la base, $v = \sum_i a_i v_i$ et on a la solution:

$$x(t) = \sum_i a_i e^{\lambda_i t} v_i.$$

Autrement dit, soit P la matrice de passage vers la base (v_1, \dots, v_n) , soit $B = P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Soit $u = P^{-1}v$. Alors

$$x(t) = P \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})u.$$

(b) On calcule les projecteurs spectraux Π_i : soit $r(z) = (z - \lambda_i)q_i(z)$, $q_i(z) = (z - \lambda_1) \dots (z - \lambda_{i-1})(z - \lambda_{i+1}) \dots (z - \lambda_k)$. Alors $\Pi_i = \frac{1}{q_i(z - \lambda_i)} q_i(A)$. Finalement, la solution est

$$x(t) = \sum_i e^{\lambda_i t} \Pi_i v.$$

1.9. Proposition. *Comportement asymptotique des solutions.* Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- 1) Pour toute solution φ on a $\varphi(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$.
- 2) Toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative.

Exponentielle d'une matrice.

Pour toute solution de l'équation $x'(t) = Ax(t)$ on a $\frac{d^k x(t)}{dt^k} = A^k x(t)$.

La série de Taylor de $x(t)$, $\sum_0^\infty \frac{t^n}{n!} x^{(n)}(0)$ s'écrit donc

$\sum_0^\infty \frac{t^n}{n!} A^n v$, où $v = x(0)$.

2.1. Proposition. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $v \in \mathbb{C}^n$. La série $\sum_0^\infty \frac{t^n}{n!} A^n v$ converge normalement sur tout intervalle fini de \mathbb{R} . La somme de cette série $\varphi(t) = \sum_0^\infty \frac{t^n}{n!} A^n v$ est dérivable par rapport à t et $\frac{d}{dt}\varphi(t) = A\varphi(t)$.

En particulier, pour toute matrice A la série $\sum_0^\infty \frac{A^n}{n!}$ converge (absolument).

Définition. La somme de la série

$$e^A = \sum_0^\infty \frac{A^n}{n!}$$

s'appelle l'exponentielle de A .

2.2. Corollaire. La série (à coefficients matriciels) $\sum_0^\infty \frac{t^n}{n!} A^n$ converge normalement sur tout intervalle fini. Sa somme e^{tA} est dérivable par rapport à t et $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$.

2.3. Corollaire: existence. Pour $v \in \mathbb{C}^n$, $\varphi(t) = e^{tA}v$ est une solution de l'équation $x' = Ax$ vérifiant la condition initiale $\varphi(0) = v$.

Unicité de la solution. Soit $\varphi(t)$ une solution quelconque vérifiant $\varphi(0) = v$. Posons $\psi(t) = e^{-tA}\varphi(t)$. La dérivation donne $\psi'(t) = 0$, d'où $\psi(t) = v$. Si on prend $e^{tA}v$ comme $\varphi(t)$ on a $e^{-tA}e^{tA}v = v$ ce qui est valable quelque soit v .

Donc $e^{-tA}e^{tA} = Id$, e^{-tA} est l'inverse de e^{tA} . Finalement,

$\psi(t) = e^{-tA}\varphi(t) = v$ entraîne $\varphi(t) = e^{tA}v$.

2.4. Corollaire. e^{tA} est l'unique fonction matricielle $U(t)$ vérifiant l'équation $\frac{d}{dt}U(t) = AU(t)$ et la condition initiale $U(0) = Id$.

Cas diagonalisable: si $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $e^A = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$.

Changement de base: $e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^AP$.

2.5. Lemme. a) Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les valeurs propres de A . Alors $(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$ sont les valeurs propres de e^A .

b) $\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$.

(La démonstration est fait par la trigonalisation.)

2.6. Lemme. Si $AB = BA$, on a $e^{A+B} = e^A e^B$.

[En particulier, e^A est inversible et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.]

Démonstration. On note que $AB = BA$ entraîne $e^{tA}B = e^{tA}B$. Soit $U(t) = e^{tA}e^{tB}$. Alors

$$U'(t) = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB} = (A + B)e^{tA}e^{tB} = (A + B)U(t).$$

En plus $U(0) = Id$. L'unicité entraîne que $U(t) = e^{t(A+B)}$. Ensuite on pose $t = 0$.

Noter que $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$: la famille $\{e^{tA}\}$ est un "groupe à un paramètre". En particulier, e^{tA} est inversible et $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$.

2.7. Cas général. Soit $A = \mathcal{D} + \mathcal{N}$ la décomposition de Dunford (ou de Jordan) et $\mathcal{N}^{l+1} = 0$. Alors

$$e^{tA} = e^{t\mathcal{D}+t\mathcal{N}} = e^{t\mathcal{D}}(I + t\mathcal{N} + t^2\mathcal{N}^2/2! + \dots + t^l\mathcal{N}^l/l!)$$

Utilisation des projecteurs spectraux. Rappelons que $\mathcal{D} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \Pi_i$, où Π_i est le projecteur spectral sur le sous-espace caractéristique associé à λ_i , et $\mathcal{N} = A - \mathcal{D}$. Alors

$$e^{t\mathcal{D}} = \sum_{i=1}^k e^{\lambda_i t} \Pi_i$$

On en déduit la structure des éléments de e^{tA} en tant que fonctions de t .

Remarque. Les colonnes de e^{tA} sont les solutions du système $x' = Ax$ vérifiant les conditions initiales particulières: sa j -ème colonne ψ_j vérifie $\psi_j(0) = e_j$, le j -ème vecteur canonique.

En fait, e^{tA} contient autant d'information que n'importe quelle base des solutions:

2.8. Lemme. (i) Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une famille des solutions de l'équation $x' = Ax$. Soit $\Phi(t)$ la matrice dont les colonnes sont $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Alors $\Phi(t) = e^{tA}\Phi(0)$.

(ii) Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base des solutions de l'équation $x' = Ax$. Soit $\Phi(t)$ la matrice dont les colonnes sont $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. [On appelle $\Phi(t)$ une solution (ou une matrice) fondamentale.] Alors $e^{tA} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}$.

Exemple en dimension 2.

Soit le polynôme caractéristique $p_A(z) = z^2 + az + b$.

Cas 1: racines simples $\lambda \neq \mu$. Alors

$$\Pi_\lambda = \frac{1}{\lambda - \mu}(A - \mu I) \text{ et } \Pi_\mu = \frac{1}{\mu - \lambda}(A - \lambda I). \text{ Ensuite}$$

$$e^A = e^\lambda \Pi_\lambda + e^\mu \Pi_\mu = \frac{1}{\lambda - \mu}[(e^\lambda - e^\mu)A - (\mu e^\lambda - \lambda e^\mu)I].$$

Cas particulier: $a = 0$, alors $\mu = -\lambda$ et on a

$$e^A = \frac{1}{2\lambda}(e^\lambda - e^{-\lambda})A + \frac{1}{2}(e^\lambda + e^{-\lambda})I.$$

Oscillations harmoniques: si $a = 0$ et en plus $b > 0$, alors λ est imaginaire, $\lambda = i\omega$, et $e^A = \frac{1}{\omega} \sin \omega A + \cos \omega I$. De même,

$$e^{tA} = \frac{1}{\omega} \sin(\omega t)A + \cos(\omega t)I.$$

Cas 2: racine double λ . Alors $A = \lambda I + N$ où N est nilpotente: $N^2 = 0$.

On a $e^A = e^\lambda(I + N)$.

L'exponentielle et la méthode d'Euler.

2.9. Proposition. $e^A = \lim_{n \rightarrow \infty} (I + A/n)^n$.