Equations différentielles linéaires aux coefficients constants.

Système de n équations d'ordre 1.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$$

où $\mathbf{x}(t) \in K^n$, $A \in M_n(K)$, $K = \mathrm{R}$ ou C. Une solution est une fonction $\varphi : I \to K^n$ définie sur un intervalle I et vérifiant $\frac{d}{dt}\varphi(t) = A\varphi(t)$.

Propriétés générales.

1.1. L'ensemble des solutions est un espace vectoriel sur K (conséquence de la linéarité de l'équation). [On verra que sa dimension est n.]

1.2. Si $\varphi(t)$ est une solution et $c \in \mathrm{R}$, alors $\varphi(t + c)$ l'est aussi (conséquence du fait que A est à coefficients constants).

1.3. *Complexification.* Soit A une matrice *réelle* et $\mathbf{z}(t)$ une solution *complèxe*: $\mathbf{z}' = A\mathbf{z}$, $(\mathbf{z}(t) \in \mathrm{C}^n)$. Alors la partie réelle $\mathbf{x}(t) = Re(\mathbf{z}(t))$ et la partie imaginaire $\mathbf{y}(t) = Im(\mathbf{z}(t))$ de la solution complèxe sont des solutions réelles.

Il est donc utile de chercher dès le début des solutions complèxes.

1.4. Chaque vecteur propre v de A, $Av = \lambda v$, engendre une solution "exponentielle": $\varphi(t) = e^{\lambda t}v$. Si A est diagonalisable, une base de vecteurs propres donne n solutions de $x' = Ax$ linéairement indépendentes (et toute autre solution sera leur combinaison linéaire).

1.5. *Changement de base.* Par un changement linéaire des variables, $x = Py$, le système différentiel $x' = Ax$ est transformé en $y' = By$ avec $B = P^{-1}AP$. Pour simplifier le système on cherche à réduire la matrice A à une forme "simple".

.

Cas diagonalisable. Si A est diagonalisable, $B = P^{-1}AP = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, le système $y' = By$ est scindé (séparation des variables complète): $y_1' = \lambda_1 y_1$, ... , $y_n' = \lambda_1 y_n$. Toutes ses solutions sont donnés par $y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$, ... , $y_n(t) = c_n e^{\lambda_n t}$. Remarquons que $c_i = y_i(0)$. On en déduit que pour tout $c = (c_1, ..., c_n) \in \mathrm{K}^n$ il existe une solution unique $y(t)$ définie sur R vérifiant la condition initiale $y(0) = c$.

.

Remarque 1. Soit B une matrice qui commute avec A: $AB = BA$. Soit $\varphi(t)$ une solution de $x' = Ax$. Alors $\psi(t) = B\varphi(t)$ est aussi une solution de $x' = Ax$.

.

Remarque 2. En dérivant l'équation $x'(t) = Ax(t)$ on obtient $x''(t) = A^2x(t)$ et par récurrence $\frac{d^k x(t)}{dt^k} = A^k x(t)$.

.

Cas général. Quitte à passer au système complexifié, on peut supposer que le polynôme caractéristique $p_A(x)$ est scindé et donc $E = K^n$ se décompose en somme directe des sous-espaces caractéristiques: $E = \bigoplus_i \mathcal{C}_i$. Soit Π_i les projecteurs associés. On a vu que chaque Π_i est un polynôme en A et donc commute avec A.

Alors toute solution $\varphi(t)$ se décompose de façon unique en somme des solutions $\varphi_i(t)$ dans les sous-espaces caractéristiques:
$\varphi(t) = \sum \varphi_i(t)$, où $\varphi_i(t) = \Pi_i\varphi(t)$ et $\varphi_i(t) \in \mathcal{C}_i$.

.

Il suffit donc d'étudier l'équation $x' = Ax$ dans chaque sous-espace $\mathcal{C}_i$.

Soit f_i l'endomorphisme induit par A dans $\mathcal{C}_i$ (essentiellement, $f_i(v) = Av$ pour $v \in \mathcal{C}_i$). On sait que $f_i = \lambda_i Id + n_i$ où n_i est nilpotent: $n_i^l = 0$. (Si en plus $n_i^{l-1} \neq 0$, on appelle l l'indice de nilpotence de n_i.) Donc dans $\mathcal{C}_i$ on a l'équation $x_i' = \lambda_i x_i + n_i x_i$. Posons $x_i = e^{\lambda_i t}y$; alors y vérifie $y' = n_i y$. Mail $n_i^l = 0$, donc $\frac{d^l y}{dt^l}(t) = 0$. Cela montre que $y(t)$ est un polynôme en t de degré $< l$: $y(t) = v_0 + tv_1 + ... + t^{l-1}v_{l-1}$.

On a $\frac{d^k y}{dt^k}(0) = k!v_k$, mais aussi $\frac{d^k y}{dt^k}(0) = n_i^k y(0) = n_i^k v_0$. Donc finalement,
$v_k = \frac{1}{k!}n_i^k v_0$,
$y(t) = v_0 + tn_i v_0 + ... + \frac{t^{l-1}}{(l-1)!}n_i^{l-1}v_0 = (\sum_{k=0}^{l-1} \frac{t^k}{k!}n_i^k)v_0$ et
$x_i(t) = e^{\lambda_i t}y(t) = e^{\lambda_i t}(\sum_{k=0}^{l-1} \frac{t^k}{k!}n_i^k)v_0$.

.

On conclut que pour tout $v \in \mathcal{C}_i$ il existe une solution unique $x_i(t)$ définie sur R à valeurs dans $\mathcal{C}_i$ vérifiant la condition initiale $x_i(0) = v_0$.

.

En réunissant les composantes x_i, $x(t) = \sum_i x_i(t)$, on a la solution (unique) vérifiant la condition initiale $x(0) = v$:
$x(t) = \sum_i e^{\lambda_i t}(\sum_{k=0}^{l_i-1} \frac{t^k}{k!}n_i^k)\Pi_i v$.

.

Remarque. Pour calculer $x_i(t)$ il suffit de connaitre n_i: on a
$n_i = (A - \lambda_i Id)\Pi_i$.

1.6. Théorème d'existence et d'unicité. Pour tout $v \in K^n$ il existe une solution unique $x(t)$ définie sur R à valeurs dans K^n vérifiant la condition initiale $x(0) = v$.

.

1.7. Corollaire. L'espace vectoriel $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $x' = Ax$ définies sur R est de dimension n. Pour tout $t_0 \in R$ l'application $\mathcal{S} \to K^n$ qui à une solution φ fait correspondre sa valeur $\varphi(t_0)$ est un isomorphisme.

Les conditions suivantes sont équivalentes:

1) $(\varphi_1 ,..., \varphi_n)$ est une base de $\mathcal{S}$;

2) Pour un t_0, $(\varphi_1(t_0) ,..., \varphi_n(t_0))$ est une base de K^n;

3) Pour tout t, $(\varphi_1(t) ,..., \varphi_n(t))$ est une base de K^n.

.

1.8. Structure des solutions. Le calcul précedent montre que toute composante d'une solution *complexe* $x(t) = \sum_i x_i(t)$ est une somme

$\sum_i q_i(t)e^{\lambda_i t}$ où chaque $q_i(t)$ est un polynôme de degré inférieure à l_i, l'indice de nilpotence de n_i dans $\mathcal{C}_i$. (l_i est égale à la multiplicité de λ_i dans le polynôme minimal de A).

Toute composante d'une solution *réelle* est donc une une somme de termes $q(t)e^{\lambda t}$ (pour les valeurs propres λ réelles) et $r(t)e^{\alpha t}\cos(\beta t)+s(t)e^{\alpha t}\sin(\beta t))$, (pour les valeurs propres λ complèxes, où $\lambda = \alpha + \sqrt{-1}\beta$). Les degrés des polynômes $q(t)$, $r(t)$ et $s(t)$ sont inférieures à l'indice de nilpotence associé à λ.

.

Retour au cas diagonalisable. Si A est diagonalisable, la solution du problème à condition initiale (problème de Cauchy) $x'(t) = Ax(t)$, $x(0) = v$, est simple. On commence par calculer le polynôme caractéristique et ses racines. Pour s'assurer que A est diagonalisable, on écrit le radical

$r(z) = (z - \lambda_1)...(z - \lambda_k)$ et on vérifie que $r(A) = 0$. Ensuite on peut organiser le calcul de deux façons:

.

(a) On trouve une base $(v_1, ..., v_n)$ de vecteurs propres, on décompose la condition initiale v suivant la base, $v = \sum_i a_i v_i$ et on a la solution:

$x(t) = \sum_i a_i e^{\lambda_i t} v_i$.

Autrement dit, soit P la matrice de passage vers le base $(v_1, ..., v_n)$, soit $B = P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Soit $u = P^{-1}v$. Alors

$x(t) = P$ diag $(e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_n t})u$.

.

(b) On calcule les projecteurs spectraux Π_i: soit $r(z) = (z - \lambda_i)q_i(z)$, $q_(z) = (z - \lambda_1)...(z - \lambda_{i-1})(z - \lambda_{i+1})...(z - \lambda_n)$. Alors $\Pi_i = \frac{1}{q_i(z-\lambda_i)} q_i(A)$. Finalement, la solution est

$x(t) = \sum_i e^{\lambda_i t}\Pi_i v$.

.

1.9. Proposition. *Comportement asymptotique des solutions.* Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1) Pour toute solution φ on a $\varphi(t) \to 0$ quand $t \to \infty$.

2) Toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative.

Exponentielle d'une matrice.

.

Pour toute solution de l'équaton $x'(t) = Ax(t)$ on a $\frac{d^k x(t)}{dt^k} = A^k x(t)$.
La série de Taylot de $x(t)$, $\sum_0^\infty \frac{t^n}{n!} x^{(n)}(0)$ s'écrit donc
$\sum_0^\infty \frac{t^n}{n!} A^n v$, où $v = x(0)$.

.

2.1. Proposition. Soit $A \in M_n(\mathrm{C})$ et $v \in C^n$. La série $\sum_0^\infty \frac{t}{n!} A^n v$ converge normalement sur tout intevalle fini de R. La somme de cette série $\varphi(t) = \sum_0^\infty \frac{t^n}{n!} A^n v$ est dérivable par rapport à t et $\frac{d}{dt}\varphi(t) = A\varphi(t)$.

.

En particulier, pour toute matrice A la série $\sum_0^\infty \frac{A^n}{n!}$ converge (absolument).

Définition. La somme de la série

$$e^A = \sum_0^\infty \frac{A^n}{n!}$$

s'appelle l'exponentielle de A.

.

2.2. Corollaire. La série (à coefficients matriciels) $\sum_0^\infty \frac{t^n}{n!} A^n$ converge normalement sur tout intervalle fini. Sa somme e^{tA} est dérivable par rapport à t et $\frac{d}{dt} e^{tA} = Ae^{tA}$.

.

2.3. Corollaire: existence. Pour $v \in K^n$, $\varphi(t) = e^{tA}v$ est une solution de l'équation $x' = Ax$ vérifiant la condition initiale $\varphi(0) = v$.

.

Unicité de la solution. Soit $\varphi(t)$ une solution quelconque vérifiant $\varphi(0) = v$. Posons $\psi(t) = e^{-tA}\varphi(t)$. La dérivation donne $\psi'(t) = 0$, d'où $\psi(t) = v$. Si on prend $e^{tA}v$ comme $\varphi(t)$ on a $e^{-tA}e^{tA}v = v$ ce qui est valable quelque soit v.

Donc $e^{-tA}e^{tA} = Id$, e^{-tA} est l 'inverse de e^{tA}. Finalement,
$\psi(t) = e^{-tA}\varphi(t) = v$ entraine $\varphi(t) = e^{tA}v$.

.

2.4. Corollaire. e^{tA} est l'unique fonction matricielle $U(t)$ vérifiant l'équation $\frac{d}{d}U(t) = AU(t)$ et la condition initiale $U(0) = Id$.

.

Cas diagonalisable: si $A = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, $e^A = diag(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n})$.

.

Changement de base: $e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^A P$.

.

2.5. Lemme. a) Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ les valeurs propres de A. Alors $(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n})$ sont les valeurs propres de e^A.

b) $\det(e^A) = e^{tr(A)}$.

(La démonstration est fait par la trigonalisation.)

.

2.6. Lemme. Si $AB + BA$, on a $e^{A+B} = e^A e^B$.

.

[En pârticulier, e^A est inversible et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.]

.

Démonstration. On note que $AB = BA$ entraine $e^{tA}B = e^{tA}B$. Soit $U(t) = e^{tA}e^{tB}$. Alors

$U'(t) = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB} = (A+B)e^{tA}e^{tB} = (A+B)U(t)$.

En plus $U(0) = Id$. L'unicité entraine que $U(t) = e^{t(A+B)}$. Ensuite on pose $t = 0$.

.

Noter que $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$: la famille $\{e^{tA}\}$ est un "groupe à un paramètre". En particulier, e^{tA} est inversible et $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$.

.

2.7. Cas général. Soit $A = \mathcal{D} + \mathcal{N}$ la décomposition de Dunford (ou de Jordan) et $\mathcal{N}^{l+1} = 0$. Alors

$$e^{tA} = e^{t\mathcal{D}+t\mathcal{N}} = e^{t\mathcal{D}}(I + t\mathcal{N} + t^2\mathcal{N}^2/2! + ... + t^l\mathcal{N}^l/l!)$$

Utilisation des projecteurs spectraux. Rappeleons que $\mathcal{D} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \Pi_i$, où Π_i est le projecteur spectral sur le sous-espace caractéristique associé à λ_i, et $\mathcal{N} = A - \mathcal{D}$. Alors

$$e^{t\mathcal{D}} = \sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i t}\Pi_i$$

On en déduit la structure des éléments de e^{tA} en tant que fonctions de t.

.

Remarque. Les colonnes de e^{tA} sont les solutions du système $x' = Ax$ vérifiant les conditions initiales particulières: sa j-ème colonne ψ_j vérifie $\psi_j(0) = e_j$, le j-ème vecteur canonique.

En fait, e^{tA} contient autant d'information que n'importe quelle base des solutions:

2.8. Lemme. (i) Soit $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ une famille des solutions de l'équation $x' = Ax$. Soit $\Phi(t)$ la matrice dont les colonnes sont $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$. Alors $\Phi(t) = e^{tA}\Phi(0)$.

(ii) Soit $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ une base des solutions de l'équation $x' = Ax$. Soit $\Phi(t)$ la matrice dont les colonnes sont $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$. [On appelle $\Phi(t)$ une solution (ou une matrice) fondamentale.] Alors $e^{tA} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}$.

.

Exemple en dimension 2.

Soit le polynôme caractéristique $p_A(z) = z^2 + az + b$.

Cas 1: racines simples $\lambda \neq \mu$. Alors

$\Pi_\lambda = \frac{1}{\lambda-\mu}(A - \mu I)$ et $\Pi_\mu = \frac{1}{\mu-\lambda}(A - \lambda I)$. Ensuite

$e^A = e^\lambda \Pi_\lambda + e^\mu \Pi_\mu = \frac{1}{\lambda-\mu}[(e^\lambda - e^\mu)A - (\mu e^\lambda - \lambda e^\mu)I$.

.

Cas particulier: $a = 0$, alors $\mu = -\lambda$ et on a

$e^A = \frac{1}{2\lambda}(e^\lambda - e^{-\lambda})A + \frac{1}{2}(e^\lambda + e^{-\lambda})I$.

Oscillations harmoniques: si $a = 0$ et en plus $b > 0$, alors λ est imaginaire, $\lambda = i\omega$, et $e^A = \frac{1}{\omega}\sin\omega A + \cos\omega I$. De même,

$e^{tA} = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)A + \cos(\omega t)I$.

.

Cas 2: racine double λ. Alors $A = \lambda I + N$ où N est nilpotente: $N^2 = 0$.

On a $e^A = e^\lambda(I + N)$.

.

L'exponentielle et la méthode d'Euler.

.

2.9. Proposition. $e^A = \lim_{n\to\infty}(I + A/n)^n$.