Equations différentielles linéaires aux coefficients constants.

Système de n équations d'ordre 1.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$$

où $\mathbf{x}(t) \in K^n$, $A \in M_n(K)$, $K =$ R ou C. Une solution est une fonction $\varphi : I \to K^n$ définie sur un intervalle I et vérifiant $\frac{d}{dt}\varphi(t) = A\varphi(t)$.

(On verra que toute solution peut être prologée sur R.)

Propriétés générales.

1.1. Une combinaison linéaire des solutions est une solution (conséquence de la linéarité de l'équation).

1.2. Si $\varphi(t)$ est une solution et $c \in$ R, alors $\varphi(t + c)$ l'est aussi (conséquence du fait que A est à coefficients constants).

1.3. *Complexification.* Soit A une matrice *réelle* et $\mathbf{z}(t)$ une solution *complèxe*: $\mathbf{z}' = A\mathbf{z}$, $(\mathbf{z}(t) \in \mathrm{C}^n)$. Alors la partie réelle $\mathbf{x}(t) = Re(\mathbf{z}(t))$ et la partie imaginaire $\mathbf{y}(t) = Im(\mathbf{z}(t))$ de la solution complèxe sont des solutions réelles.

Il est donc utile de chercher dès le début des solutions complèxes.

1.4. Chaque vecteur propre v de A, $Av = \lambda v$, engendre une solution "exponentielle": $\varphi(t) = e^{\lambda t}v$. Si A est diagonalisable, une base $(v_1, ..., v_n)$ de vecteurs propres, $Av_i = \lambda_i v_i$, donne n solutions de $x' = Ax$ linéairement indépendentes et toute autre solution sera leur combinaison linéaire. En effet, en décomposant une soultion $\varphi(t)$ suivant la base, $\varphi(t) = \sum_i c_i(t)v_i$, on a $\sum_i c_i'(t)v_i = \lambda_i c_i(t)v_i$, donc $c_i'(t) = \lambda_i c_i(t)$, d'où $c_i(t) = c_i(0)e^{\lambda_i t}$,
$i = 1, ..., n$.

.

1.5. *Changement de base.* Par un changement linéaire des variables, $x = Py$, le système différentiel $x' = Ax$ est transformé en $y' = By$ avec $B = P^{-1}AP$. Pour simplifier le système on cherche à réduire la matrice A à une forme "simple".

.

Cas diagonalisable. Si A est diagonalisable, $B = P^{-1}AP = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, le système $y' = By$ est scindé: $y_1' = \lambda_1 y_1$, ... , $y_n' = \lambda_1 y_n$. Toutes ses solutions sont donnés par $y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$, ... , $y_n(t) = c_n e^{\lambda_n t}$. Remarquons que $c_i = y_i(0)$. On en déduit que pour tout $c = (c_1, ..., c_n) \in \mathrm{K}^n$ il existe une solution unique $y(t)$ définie sur R vérifiant la condition initiale $y(0) = c$.

.

Remarque 1. Soit B une matrice qui commute avec A: $AB = BA$. Soit $\varphi(t)$ une solution de $x' = Ax$. Alors $\psi(t) = B\varphi(t)$ est aussi une solution de $x' = Ax$.

Remarque 2. En dérivant l'équation $x'(t) = Ax(t)$ on obtient $x''(t) = A^2x(t)$ et par récurrence

$$\frac{d^kx(t)}{dt^k} = A^kx(t)$$

Cas général. Quitte à passer au système complexifié, on peut supposer que le polynôme caractéristique $p_A(x)$ est scindé et donc $E = K^n$ se décompose en somme directe des sous-espaces caractéristiques: $E = \bigoplus_i \mathcal{C}_i$. Soit Π_i les projecteurs associés. On a vu que chaque Π_i est un polynôme en A et donc commute avec A.

Alors toute solution $\varphi(t)$ se décompose de façon unique en somme des solutions $\varphi_i(t)$ dans les sous-espaces caractéristiques:

.

$\varphi(t) = \sum \varphi_i(t)$, où $\varphi_i(t) = \Pi_i\varphi(t)$ et $\varphi_i(t) \in \mathcal{C}_i$.

.

Il suffit donc d'étudier l'équation $x' = Ax$ dans chaque sous-espace $\mathcal{C}_i$.

.

Soit f_i l'endomorphisme induit par A dans $\mathcal{C}_i$ (rappelons que $f_i(v) = Av$ pour $v \in \mathcal{C}_i$). On sait que $f_i = \lambda_i Id + n_i$ où n_i est nilpotent: $n_i^{l_i} = 0$. (Si en plus $n_i^{l_i-1} \neq 0$, on appelle l_i l'indice de nilpotence de n_i.)

.

Notons pour l'instant $f = f_i$, $\lambda = \lambda_i$, $n = n_i$ et $l = l_i$.

.

Donc dans $\mathcal{C}_i$ on a l'équation $x'(t) = \lambda x(t) + nx(t)$. Posons $x(t) = e^{\lambda t}y(t)$; alors $y(t)$ vérifie $y'(t) = ny(t)$. Mais $n^l = 0$, donc $\frac{d^ly}{dt^l}(t) = 0$. Cela montre que $y(t)$ est un polynôme en t de degré $< l$: $y(t) = v_0 + tv_1 + ... + t^{l-1}v_{l-1}$, où les vecteurs $v_0, ..., v_{l-1}$ sont dans $\mathcal{C}_i$.

On a $\frac{d^ky}{dt^k}(0) = k!v_k$, mais aussi $\frac{d^ky}{dt^k}(0) = n^ky(0) = n^kv_0$.

Donc finalement, $v_k = \frac{1}{k!}n^kv_0$, et

$y(t) = v_0 + tnv_0 + ... + \frac{t^{l-1}}{(l-1)!}n^{l-1}v_0 = (\sum_{k=0}^{l-1} \frac{t^k}{k!}n^k)v_0$ avec $v_0 = y(0)$.

.

De cette façon on a la solution générale dans le sous-espace $\mathcal{C}_i$:

.

$x(t) = e^{\lambda t}y(t) = e^{\lambda t}(\sum_{k=0}^{l-1} \frac{t^k}{k!}n^k)x(0)$.

.

Revenant à la notation initiale on conclut que pour tout $v \in \mathcal{C}_i$ il existe une solution unique $\varphi_i(t)$ définie sur R à valeurs dans $\mathcal{C}_i$ vérifiant la condition initiale $\varphi_i(0) = v$:

$\varphi_i(t) = e^{\lambda_i t}(\sum_{k=0}^{l_i-1} \frac{t^k}{k!}n_i^k)\Pi_i v$

En réunissant les composantes φ_i, $\varphi(t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(t)$, on obtient pour tout $v \in K^n$ l'unique solution vérifiant la condition initiale $\varphi(0) = v$:

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} (\sum_{k=0}^{l_i - 1} \frac{t^k}{k!} n_i^k) \Pi_i v$$

Remarque. Pour calculer $\varphi_i(t)$ il suffit de connaitre n_i: on a
$n_i = (A - \lambda_i Id)\Pi_i$.

.

1.6. Théorème d'existence et d'unicité. Pour tout $v \in K^n$ il existe une solution unique $x(t)$ définie sur R à valeurs dans K^n vérifiant la condition initiale $x(0) = v$.

.

1.7. Corollaire. L'espace vectoriel $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $x' = Ax$ définies sur R est de dimension n. Pour tout $t_0 \in R$ l'application $\mathcal{S} \to K^n$ qui à une solution φ fait correspondre sa valeur $\varphi(t_0)$ est un isomorphisme. Les conditions suivantes sont équivalentes:

1) $(\varphi_1 ,..., \varphi_n)$ est une base de $\mathcal{S}$;
2) Pour un t_0, $(\varphi_1(t_0) ,..., \varphi_n(t_0))$ est une base de K^n;
3) Pour tout t, $(\varphi_1(t) ,..., \varphi_n(t))$ est une base de K^n.

.

1.8. Structure des solutions. Le calcul précedent montre que toute composante d'une solution *complexe* $\varphi(t) = \sum_i \varphi_i(t)$ est une somme
$\sum_i q_i(t) e^{\lambda_i t}$ où chaque $q_i(t)$ est un polynôme de degré inférieure à l_i, l'indice de nilpotence de n_i dans $\mathcal{C}_i$. (l_i est égale à la multiplicité de λ_i dans le polynôme minimal de A).

Toute composante d'une solution *réelle* est donc une une somme de termes $q(t)e^{\lambda t}$ (pour les valeurs propres λ réelles) et $r(t)e^{\alpha t}\cos(\beta t) + s(t)e^{\alpha t}\sin(\beta t))$, (pour les valeurs propres λ complèxes, où $\lambda = \alpha + \sqrt{-1}\beta$). Les degrés des polynômes $q(t)$, $r(t)$ et $s(t)$ sont inférieures à l'indice de nilpotence associé à λ.

.

Retour au cas diagonalisable. Si A est diagonalisable, la solution du problème à condition initiale (problème de Cauchy) $x'(t) = Ax(t)$, $x(0) = v$, est simple. On commence par calculer le polynôme caractéristique et ses racines. Pour s'assurer que A est diagonalisable, on écrit le radical
$r(z) = (z - \lambda_1)...(z - \lambda_k)$ et on vérifie que $r(A) = 0$. Ensuite on peut organiser le calcul de deux façons:

(a) On trouve une base $(v_1, ..., v_n)$ de vecteurs propres, on décompose la condition initiale v suivant la base, $v = \sum_i a_i v_i$ et on a la solution:

$\varphi(t) = \sum_i a_i e^{\lambda_i t} v_i$.

Autrement dit, soit P la matrice de passage vers le base $(v_1, ..., v_n)$, soit $B = P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Soit $u = P^{-1}v$. Alors

$\varphi(t) = P$ diag $(e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_n t})u$.

.

(b) On calcule les projecteurs spectraux Π_i: soit $r(z) = (z - \lambda_i)q_i(z)$, $q_i(z) = (z - \lambda_1)...(z - \lambda_{i-1})(z - \lambda_{i+1})...(z - \lambda_k)$. Alors $\Pi_i = \frac{1}{q_i(\lambda_i)} q_i(A)$. Finalement, la solution est

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} \Pi_i v$$

.

1.9. Proposition. *Comportement asymptotique des solutions.* Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1) Pour toute solution φ on a $\varphi(t) \to 0$ quand $t \to \infty$.

2) Toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative.