

Géométrie affine.

Soit E un R -espace vectoriel de dimension finie.

1.1. Définition. Un **espace affine** dirigé par E est un ensemble non-vidé \mathcal{E} muni de l'application $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow E$ qui associe au couple de points $A, B \in \mathcal{E}$ le vecteur \overrightarrow{AB} et qui vérifie

1. Pour tout $O \in \mathcal{E}$ l'application $A \rightarrow \overrightarrow{OA}$ est une bijection de \mathcal{E} sur E .

2. Pour tous $A, B, C \in \mathcal{E}$ on a la *relation de Chasles*: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

La relation de Chasles a pour conséquence immédiate: $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

La *dimension* de \mathcal{E} est par définition celle de E .

Exemple. L'espace vectoriel E admet une **structure canonique de l'espace affine**: pour deux vecteurs u et v on pose $\overrightarrow{uv} = v - u$.

1.2. Vectorialisation. Fixons "l'origine" O dans \mathcal{E} . Soit $v(A) = \overrightarrow{OA}$. Alors $v : \mathcal{E} \rightarrow E$ est une bijection qui *identifie* la structure affine de \mathcal{E} avec la structure affine canonique de E : $\overrightarrow{v(A)v(B)} = v(A) - v(B) = \overrightarrow{AB}$ - conséquence de la relation de Chasles. Le choix d'origine donc "vectorialise" l'espace affine. Réciproquement, on peut dire qu'un espace affine est un espace vectoriel avec l'origine effacée.

1.3. Translations. Soit $v \in E$. On définit la translation de vecteur v , noté $T_v : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ par la condition $\overrightarrow{AT_v(A)} = v$.

Propriétés des translations:

(i) $T_0 = Id$ et $T_{u+v} = T_u T_v$ (relation de Chasles). En particulier, T_v est une bijection, et $T_v^{-1} = T_{-v}$.

On exprime cette propriété en disant que le groupe additif E agit sur l'espace affine \mathcal{E} .

(ii) Pour tous deux points $A, B \in \mathcal{E}$ il existe un unique vecteur v tel que $T_v(A) = B$.

Si $\mathcal{E} = E$, on a $T_v(u) = v + u$.

Par analogie, on adopte la notation: $T_v(a) = A + v$; rappelons que $B = A + v$ est équivalent à $\overrightarrow{AB} = v$.

1.4. Remarque. La donnée de la structure affine sur \mathcal{E} est équivalente à la donnée de l'action de E sur \mathcal{E} - la donnée d'une famille de "translations" $T_v, v \in E$, vérifiant les propriétés (i) et (ii).

Repère affine. Coordonnées affines

1.5. Définition. Soit $\dim \mathcal{E} = n$. On appelle **repère affine** de \mathcal{E} la donnée de $n + 1$ points A_0, \dots, A_n tels que les vecteurs $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}$ forment une base de E .

Soit $e_i = \overrightarrow{A_0A_i}$. De manière équivalente, le repère affine est donné par le choix de "l'origine" A_0 et d'une base (e_1, \dots, e_n) de E .

L'origine A_0 permet d'identifier \mathcal{E} et E ; la base (e_1, \dots, e_n) donne un système de coordonnées dans E , donc un système de coordonnées dans \mathcal{E} .

Plus précisément, au point B on associe les coordonnées (x_i) du vecteur $\overrightarrow{A_0B} = \sum_i x_i e_i$.

Tout point B de \mathcal{E} admet donc l'expression unique: $B = A_0 + \sum_i x_i e_i$.

Barycentres (combinaisons affines)

Soit $v \in E$ et $A \in \mathcal{E}$. La **droite** passant par A dirigée par v est l'ensemble de points $M = A + \lambda v$, $\lambda \in R$. La droite passant par deux points A et B est dirigée par le vecteur $v = \overrightarrow{AB}$; ses points sont $M = A + \lambda \overrightarrow{AB}$, $\lambda \in R$.

Choisissons une "origine" O . Alors $M = A + \lambda \overrightarrow{AB}$ si et seulement si $\overrightarrow{OM} = (1 - \lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} = \mu\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$ avec $\lambda + \mu = 1$. On appelle M le **barycentre** des points A et B affectés de poids μ et λ .

1.6. Lemme. Soit A_1, \dots, A_k des points affectés des poids $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, tels que $\sum_i \lambda_i \neq 0$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) Le point M tel que

$$\sum_i \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = 0$$

(ii) Il existe un point O tel que

$$\left(\sum_i \lambda_i\right)\overrightarrow{OM} = \sum_i \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$$

(iii) Le point M tel que pour tout $O \in \mathcal{E}$ on a

$$\left(\sum_i \lambda_i\right)\overrightarrow{OM} = \sum_i \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$$

1.7. Définition. Le point M défini dans le lemme s'appelle le **barycentre** des points A_1, \dots, A_k affectés des coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

Le barycentre est donc l'unique point M tel que $\sum_i \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = 0$.

La formule explicite pour le barycentre est

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{\sum_i \lambda_i} \sum_i \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$$

On notera $M = \text{Bar}\{(\lambda_i, A_i)\}$. Si $\sum_i \lambda_i = 1$, on adopte souvent la notation $M = \sum_i \lambda_i A_i$.

Si $\mathcal{E} = E$, le barycentre v des vecteurs u_1, \dots, u_k affectés des poids $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ est $v = \frac{1}{\sum_i \lambda_i} \sum_i \lambda_i u_i$.

Vu que v est une combinaison linéaire des vecteurs u_i , on peut appeler le barycentre "combinaison affine des points A_i ".

En particulier, si $\sum_i \lambda_i = 1$, alors $v = \sum_i \lambda_i u_i$. (Comparer avec la notation pour le barycentre: $M = \sum_i \lambda_i A_i$.)

1.8. Coordonnées barycentriques.

Soit (A_0, \dots, A_n) (ou $(A_0; e_1, \dots, e_n)$ avec $e_i = \overrightarrow{A_0 A_i}$), un repère affine, soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ les coordonnées du point M : $\overrightarrow{A_0 B} = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.

Soit $x_0 = 1 - \sum_{i=1}^n x_i$. Alors $B = \text{Bar}\{(x_i, A_i)_{0 \leq i \leq n}\} = \sum_{i=0}^n x_i A_i$.

Les $n + 1$ coordonnées (x_0, x_1, \dots, x_n) sont les **coordonnées barycentriques** de M dans le repère (A_0, \dots, A_n) . Noter que $\sum_{i=0}^n x_i = 1$.

Donc (A_0, \dots, A_n) est un repère affine si et seulement si tout point $B \in \mathcal{E}$ s'écrit de façon unique comme un barycentre des points A_0, \dots, A_n . Cela rend la définition du repère affine plus symétrique: une permutation des points du repère définit aussi un repère.

La propriété suivante de "l'associativité du barycentre" est très utile.

1.9. Proposition. Supposons qu'on a une partition de l'ensemble des indices $I = \{1, \dots, n\}$ en k parties disjointes: $I = I_1 \cup \dots \cup I_k$. Soit $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des poids tels que $\sum_i \lambda_i \neq 0$ et $\mu_j = \sum_{i \in I_j} \lambda_i \neq 0$, $j = 1, \dots, k$. Soit B_j le barycentre des points du j -ème groupe: $B_j = \text{Bar}\{(\lambda_i, A_i)_{i \in I_j}\}$.

Alors $\text{Bar}\{(\lambda_i, A_i)\} = \text{Bar}\{(\mu_j, B_j)\}$.

Sous-espace affine

1.10. Définition. Une partie non-vide \mathcal{F} de l'espace affine \mathcal{E} est un **sous-espace affine** si avec tout ses deux points \mathcal{F} contient la droite passant par ces deux points.

1.11. Lemme. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- (i) \mathcal{F} est un sous-espace affine de \mathcal{E} .
- (ii) Si $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{F}$ alors tout barycentre des points A_1, \dots, A_k est dans \mathcal{F} . (Toute combinaison affine des points de \mathcal{F} est dans \mathcal{F} .)
- (iii) Pour tout $O \in \mathcal{F}$ l'ensemble $F = \{\overrightarrow{OM}, M \in \mathcal{F}\}$ est un sous-espace vectoriel de E . De cette façon, \mathcal{F} est à son tour un espace affine dirigé par F .

(iv) $\mathcal{F} = \{O + v, v \in F\}$ où F est un sous-espace vectoriel de E et O un point de \mathcal{F} .

Une *droite* est un sous-espace affine de dimension 1.

Un *hyperplan* est un sous-espace affine de codimension 1 (de dimension $\dim(\mathcal{E}) - 1$).

1.12. Lemme. L'intersection non-vide d'une famille de sous-espaces affines est un sous-espace affine.

1.13. Représentation paramétrique d'un sous-espace.

Soit \mathcal{F} un sous-espace affine dirigé par F ; soit $O \in \mathcal{F}$ et (v_1, \dots, v_k) une base de F . On a donc un repère affine de \mathcal{F} et tout point B de \mathcal{F} admet l'expression unique: $B = O + \sum_{i=1}^k s_i v_i$, $(s_1, \dots, s_k) \in R^k$.

Soit (x_1, \dots, x_n) un système de coordonnées affines dans \mathcal{E} . Soit (c_1, \dots, c_n) les coordonnées du point O et (a_{1i}, \dots, a_{ni}) les coordonnées du vecteur v_i . Alors les coordonnées du point $B = O + \sum_{i=1}^k s_i v_i$ sont $x_j = c_j + \sum_{i=1}^k a_{ji} s_i$, $j = 1, \dots, n$.

Position relative de deux sous-espaces

1.14. Lemme. (i) Soit \mathcal{F} et \mathcal{G} deux sous-espaces de \mathcal{E} d'intersection non-vide. Alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est dirigé par $F \cup G$.

(ii) Si les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires ($E = F \oplus G$), alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un seul point.

On dit que deux sous-espaces \mathcal{F} et \mathcal{G} de \mathcal{E} sont **parallèles** si $F \subset G$ ou $G \subset F$. On conclut dans ce cas que soit \mathcal{F} et \mathcal{G} sont disjoints, soit l'un contient l'autre.

Sous-espace affine engendré par une partie.

Soit $S \subset \mathcal{E}$ une partie non-vide. Le sous-espace affine engendré par S , noté $\text{Aff}(S)$, est l'intersection de tous les sous-espaces affines qui contiennent S .

1.15. Lemme. $\text{Aff}(S)$ est l'ensemble de toutes les combinaisons affines (barycentres) des points de S .

1.16. Lemme. Soit $O \in S$ et soit F le sous-espace vectoriel de \mathcal{E} engendré par les vecteurs \overline{OA} , $A \in S$. Alors l'espace directeur de $\text{Aff}(S)$ est F : $\text{Aff}(S) = \{O + v, v \in F\}$.

1.17. Corollaire. (A_0, \dots, A_n) est un repère affine si et seulement si $n = \dim \mathcal{E}$ et $\text{Aff}(A_0, \dots, A_n) = \mathcal{E}$.

2. Applications affines.

2.1. Définition. Une application $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est **affine** si $f(\lambda A + \mu B) = \lambda f(A) + \mu f(B)$ pour tout $A, B \in \mathcal{E}$ et tout λ, μ tels que $\lambda + \mu = 1$.

2.2. Lemme. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est une application affine.

(ii) f conserve les barycentres: $f(\text{Bar}\{\lambda_i, A_i\}) = \text{Bar}\{\lambda_i, f(A_i)\}$.

(iii) Pour un point $A \in \mathcal{E}$ l'application $df : E \rightarrow F$ défini par $df(v) = \overrightarrow{f(A)f(A+v)}$ est linéaire.

(iv) Pour tout point A on a $f(A+v) = f(A) + df(v)$ où $df : E \rightarrow F$ est une application linéaire.

(v) f est différentiable et sa différentielle $df : E \rightarrow F$ est constante sur \mathcal{E} .

(vi) Si par le choix des origines $O \in \mathcal{E}$ et $O' \in \mathcal{F}$ on identifie \mathcal{E} avec E et \mathcal{F} avec F , alors $f(v) = a + df(v)$: "une application affine est une application linéaire plus une constante".