

## 2. Produit scalaire. Espaces Euclidiens.

**2.1.** Soit  $E$  un  $R$ -espace vectoriel. Un **produit scalaire** dans  $E$  est une forme bilinéaire symétrique définie positive, noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

La **norme** associée est définie par  $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ .

L'inégalité de Cauchy-Schwartz  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$  entraîne l'inégalité du triangle  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

La distance euclidienne  $d$  dans  $E$  est définie par  $d(x, y) = \|x - y\|$ .

Le produit scalaire est déterminé par la norme associée:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

("identité de polarisation").

*Remarque:* une norme dans  $E$  n'est pas en général associée à un produit scalaire.

*Exemples:* 1. Produit scalaire canonique dans  $R^n$ :  $\langle x, y \rangle = \sum_1^n x_i y_i$ ; la norme est donnée par le "théorème de Pythagore":  $\|x\|^2 = \sum_1^n x_i^2$ .

2.  $E = C([a, b], R)$ ,  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$ .

Un  $R$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire s'appelle **espace euclidien**.

**2.2.** Deux vecteurs  $x$  et  $y$  sont **orthogonaux** si  $\langle x, y \rangle = 0$ .

**Sous-espace orthogonal.** Soit  $A \subset E$ ; l'**orthogonal** de  $A$  est l'ensemble de vecteurs de  $E$  orthogonaux à tous les vecteurs de  $A$ :

$$A^\perp = \{x \in E : \forall y \in A \text{ on a } \langle x, y \rangle = 0\}.$$

Il est clair que  $A^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

Deux sous-espaces  $E_1$  et  $E_2$  sont **orthogonaux** si tout vecteur de  $E_1$  est orthogonal à tout vecteur de  $E_2$ . Ceci est équivalent à dire que  $E_2 \subset E_1^\perp$  ou que  $E_1 \subset E_2^\perp$ . Il est évident dans ce cas que  $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ .

**Famille orthogonale.** Une famille de vecteurs de  $E$  est dite **orthogonale** si les vecteurs de cette famille sont deux à deux orthogonaux.

Une famille de vecteurs de  $E$  est dite **orthonormale** si elle est orthogonale et tous ses vecteurs sont de norme 1.

**Lemme.** Une famille orthogonale sans vecteurs nuls est libre.

D'une famille orthogonale  $(e_1, \dots, e_n, \dots)$  on peut facilement passer à une famille orthonormale en normalisant les vecteurs  $e_i$ :  $e'_i = \frac{e_i}{\|e_i\|}$ .

*Exemple.* Dans l'espace des fonctions continues  $C([0, 2\pi])$  avec le produit scalaire  $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$  la famille  $(1, \cos nx, \sin nx)_{n \geq 1}$  est orthogonale et la famille  $(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx)_{n \geq 1}$  est orthonormale.

### 2.3. Coordonnées dans une base orthonormale.

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base **orthonormale**, soit  $x = \sum_1^n x_i e_i$ ,  $y = \sum_1^n y_i e_i$ . Alors  $\langle x, y \rangle = \sum_1^n x_i y_i$ ,  $\|x\|^2 = \sum_1^n x_i^2$  ("théorème de Pythagore") et  $x_i = \langle x, e_i \rangle$ .

*Coordonnées dans une base orthogonale:*  $\langle x, y \rangle = \sum_1^n \langle e_i, e_i \rangle x_i y_i$   
 $\|x\|^2 = \sum_1^n \langle e_i, e_i \rangle x_i^2$  et  $x_i = \frac{\langle x, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle}$ .

### 2.4. Orthogonalisation de Gram-Schmidt.

Soit  $(v_1, \dots, v_n, \dots)$  une famille libre dans  $E$ . On peut construire une famille orthonormale  $e_1, \dots, e_n, \dots$  telle que  $\text{Vect}(v_1, \dots, v_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$  pour tout  $k \geq 1$ . (Autrement dit,  $e_k$  est une combinaison linéaire de  $v_1, \dots, v_k$ .)

*Construction par récurrence:*

On pose  $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$ ;  $\tilde{e}_{k+1} = v_{k+1} - \sum_1^k \langle v_{k+1}, e_i \rangle e_i$  et  $e_{k+1} = \frac{\tilde{e}_{k+1}}{\|\tilde{e}_{k+1}\|}$ .

**Corollaire.** Tout espace Euclidien admet une base orthonormale. Toute famille orthonormale dans un espace Euclidien peut être complétée en une base orthonormale.

*Remarque:* le corollaire est faux en dimension infinie: l'espace des fonctions continues  $C([a, b], \mathbb{R})$  n'admet pas de base orthogonale au sens algébrique.

### 2.5. Projection orthogonale.

Soit  $E$  un espace muni du produit scalaire et  $F \subset E$  un sous-espace.

**Motivation.** On sait que  $F \cap F^\perp = \{0\}$ . Supposons que  $F^\perp$  est un supplémentaire de  $F$ , donc  $E = F \oplus F^\perp$ , somme directe orthogonale. (Ceci est toujours vrai en dimension finie.)

Le projecteur orthogonal sur  $F$ , noté  $P_F$ , est par définition le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $F^\perp$ . Si  $x \in E$  on décompose  $x = x_1 + x_2$  avec  $x_1 \in F$  et  $x_2 \in F^\perp$ ; alors, par définition,  $P_F(x) = x_1$ , la composante "orthogonale" de  $x$  dans  $F$ .

Noter que le projecteur orthogonal sur  $F^\perp$  est  $P_{F^\perp} = Id - P_F$ .

**Définition.** Soit  $F \subset E$  un sous-espace de dimension finie.

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base **orthonormale** de  $F$ .

On définit  $P_F : E \rightarrow E$  par  $P_F(x) = \sum_1^n \langle x, e_i \rangle e_i$ . Alors on a

**Lemme.**  $P_F$  est un projecteur sur  $F$  parallèlement à  $F^\perp$ .

•• *Démonstration.* Si  $x \in F$ , alors  $P_F(x) = x$ , donc  $P_F^2 = P_F$ . Donc  $P_F$  est un projecteur. Le noyau  $\text{Ker}(P_F) = \{x \in E : \langle x, e_i \rangle = 0, i = 1, \dots, n\} = \{x \in E : \langle x, y \rangle = 0\}$  pour tout  $y \in F$ , donc  $\text{Ker}(P_F) = F^\perp$ . ••

**Corollaire.** Si  $F$  est un sous-espace de dimension finie,  $F^\perp$  est un supplémentaire de  $F$ :  $E = F \oplus F^\perp$ , somme directe orthogonale. On a aussi  $(F^\perp)^\perp = F$ .