Déterminants 2.

8. Proposition. Soit $A = (a_{ij})$. On a

$$detA = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} ... a_{\sigma(n),n}$$

Déterminant de la matrice transposée

.

Proposition 8 permet de démontrer facilement le résultat suivant:

9. Théorème. Pour toute matrice $A \in Mat_n(K)$ on a

$$det({}^tA) = detA$$

• • *Démonstration.* On a

dét$A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} ... a_{\sigma(n),n}$ et dét$({}^tA) = \sum_{\rho \in S_n} \varepsilon(\rho) a_{1,\rho(1)} ... a_{n,\rho(n)}$.

Si $\rho = \sigma^{-1}$, on a $\varepsilon(\rho) = \varepsilon(\sigma)$ et le produit $a_{1,\rho(1)} ... a_{n,\rho(n)}$ contient les mêmes termes que le produit $a_{\sigma(1),1} ... a_{\sigma(n),n}$. En effet, le terme a_{ij} est présent dans le produit $a_{\sigma(1),1} ... a_{\sigma(n),n}$ ssi $i = \sigma(j)$; le même terme a_{ij} est présent dans le produit $a_{1,\rho(1)} ... a_{n,\rho(n)}$ ssi $j = \rho(i) = \sigma^{-1}(i)$, donc ssi $i = \sigma(j)$. • •

.

10. Corollaire. Toutes les propriétés du déterminant relatives aux colonnes peuvent être affirmées pour les lignes.

.

Formes linéaires alternées et déterminant.

Définition. Soit E un espace vectoriel sur K. Une **forme n-linéaire alternée** sur E est une application $f : E \times ... \times E \to K$ (donc une fonction de n variables vectories à valeurs dans K) telle que

(1) f est linéaire par rapport à chaque variable vectorielle;

(2) si on échange entre elles deux variables vectorielles, f change de signe.

En particulier, si parmi les vecteurs $v_1, ..., v_n$ il y a deux vecteurs égaux, on a $f(v_1, ..., v_n) = 0$.

Le déterminant considéré comme une fonction de n colonnes de la matrice est une forme $n-$linéaire alternée sur K^n.

Remarque: Il ne faut pas confondre n-linéaire (on dit aussi "multilinéaire") avec linéaire: le déterminant n'est pas une fonction linéaire de la matrice!

Comme avant, on montre que pour une permutation σ on a

$$f(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(v_1, ... v_n)$$

.

11. Théorème. Soit dim $E = n$. Soit $f : E \times ... \times E \to K$ une forme $n-$linéaire alternée. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E, $v_1, ...v_n \in E$ et $v_j = \sum_i v_{ij} e_i$, $j = 1, ..., n$. Alors

$$f(v_1, ..., v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) v_{\sigma(1),1} ... v_{\sigma(n),n} f(e_1, ..., e_n)$$

Autrement dit, $f(v_1, ..., v_n) = c \cdot detV$, où $V = (v_{ij})$ est la matrice des coefficients v_{ij} et $c = f(e_1, ..., e_n)$.

.

• • *Démonstration.*

$f(v_1, ..., v_n) = f(\sum_{i_1} v_{i_1 1} e_{i_1}, ..., \sum_{i_n} v_{i_n n} e_{i_n}) =$
$\sum_{i_1,...,i_n} v_{i_1 1} ... v_{i_n n} f(e_{i_1}, ..., e_{i_n}) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) v_{\sigma(1),1} ... v_{\sigma(n),n} f(e_1, ..., e_n)$
• •

.

12. Corollaire: caractérisation du déterminant. Le déterminant est l'unique forme n- linéaire alternée normalisée: dét $(I_n) = 1$. Toute forme n- linéaire alternée sur K^n est proportionnelle au déterminant.

.

Noter que le déterminant est un polynôme homogène de degré n en n^2 variables (a_{ij}) qui contient $n!$ monômes.

Vu que $n!$ croît très vite avec n, cette formule n'est pas très pratique pour les calculs.

.

Déterminant du produit des matrices.

13. Théorème. Pour toutes deux matrices $A, B \in Mat_n(K)$ on a

$$det(AB) = (detA)(detB)$$

• • *Démonstration.* Considérons l'application $f : K^n \times ... \times K^n \to K$ définie par $f(v_1, ..., v_n) = \text{dét}(Av_1, ..., Av_n)$ Ici $v_i \in K^n, i = 1, ..., n$; donc v_j est la colonne $v_j = (v_{1j}, ..., v_{nj})^t$.

Soit $V = (v_1, ...v_n) = (v_{ij})$ la matrice avec les colonnes $(v_1, ...v_n)$.

On vérifie aisément que f est n-linéaire et alternée par rapport aux vecteurs $v_1, ...v_n$. Donc (Théorème 11), f est proportionnelle à détV:

$f(v_1, ..., v_n) = det(Av_1, ..., Av_n) = c \cdot detV$,

où $c = f(e_1, ..., e_n) = det(Ae_1, ..., Ae_n) = detA$.

Mais la matrice formée par les colonnes $(Av_1, ..., Av_n)$ n'est rien d'autre que AV : $(Av_1, ..., Av_n) = AV$ et la formule précédente devient $det(AV) = (detA)(detV)$. Il suffit maintenant de prendre $V = B$.

• •

14. Corollaire. Si $A \in Mat_n(K)$ est inversible on a
dét $(A^{-1}) = (\text{dét}A)^{-1}$.

15. Corollaire. Si A et A' sont deux matrices semblables, $A' = P^{-1}AP$, alors détA' =détA.

En particulier, le déterminant de la matrice associée à un endomorphisme ne dépend pas du choix de la base.

.

Déterminant d'un endomorphisme.

Définition. Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel E. On appelle **déterminant** de f le déterminant de la matrice qui représente f dans une base quelconque de E.

On note les propriétés suivantes:

1. det$f \neq 0$ si et seulement si f est inversible.

2. Si f et g sont des endomorphismes de E, on a det$(f \circ g)$ =(det$f$)det(g).

.

Développement suivant une ligne ou une colonne; cofacteurs.

Soit A_{ij} la matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A.

Compte tenu du fait que l'on peut échanger les lignes entre elles (le déterminant change de signe), à partir du développement suivant la première ligne on a le développement du déterminant suivant la i-ème ligne. En passant à la matrice transposée on a le développement du déterminant suivant la j-ème colonne.

16. Théorème. 1. Le développement du déterminant suivant la i-ème ligne:

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det A_{ij}$$

2. Le développement du déterminant suivant la j-ème colonne:

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det A_{ij}$$

17. Définition. On appelle **cofacteur** de l'élément a_{ij} le scalaire $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}\text{dét}A_{ij}$.

On a donc les développements:

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}$$

Une définition équivalente des cofacteurs est souvant utile:

$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}\text{dét}A_{ij} = det(C_1, ..., C_{j-1}, e_i, Cj+1, ..., C_n)$, où e_i est le i-ème vecteur de la base canonique de K^n et $C_1, ..., C_n$ sont les colonnes de la matrice A.

.

Matrice inverse

.

19. Théorème. Soit $\Delta = (\Delta_{ij})$ la **comatrice** de A - la matrice constituée de cofacteurs de A. Alors $A({}^t\Delta) = {}^t\Delta A =(\text{dét}A)I$.

En particulier, si A est inversible ($\text{dét}A \neq 0$), on a

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}{}^t\Delta$$

.

• • *Démonstration.* La formule $\Delta_{ij} = det(C_1, ..., C_{j-1}, e_i, Cj+1, ..., C_n)$ montre immédiatement que $\sum_{i=1}^n a_{ik}\Delta_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ik}det(C_1, ..., C_{j-1}, e_i, Cj+1, ..., C_n) = det(C_1, ..., C_{j-1}, \sum_{i=1}^n a_{ik}e_i, Cj+1, ..., C_n) = det(C_1, ..., C_{j-1}, C_k, Cj+1, ..., C_n)$, ce qui est égal à 0 si $k \neq j$ et à détA si $k = j$

Donc ${}^t\Delta A =(\text{dét}A)I$. • •

Systèmes d'équations linéaires.

Nous allons considérer un **système linéaire** de n équations à n inconnues à coefficients dans K:

.

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{pmatrix}$$

.

En termes des matrices le système (S) s'écrit $AX = B$ en notant

$A = \begin{pmatrix} a_{11}.......a_{1n} \\ .... \\ a_{n1}.......a_{nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ .. \\ b_n \end{pmatrix}$.

Résoudre (S) c'est trouver tous les vecteurs $(x_1, ..., x_n)$ vérifiant (S).

.

20. Lemme. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

(1) La matrice A est inversible.

(2) Pour tout B l'équation $AX = B$ admet une solution unique.

(3) Pour tout B l'équation $AX = B$ admet au moins une solution.

(4) L'équation homogène $AX = 0$ n'admet pas de solution non-nulle.

• • *Démonstration.* Avec la matrice A on associe l'endomorphisme $u : K^n \to K^n$ défini par $u(X) = AX$.

La propriété (1) dit que u est inversible, la propriété (2) dit que u est une bijection, la propriété (3) dit que u est surjectif, et la propriété (4) dit que $Ker(u) = \{0\}$. On a vu que pour un endomorphisme (en dimension finie) ces propriétés sont équivalentes. • •

.

Si la matrice A est inversible ($\det(A) \neq 0$), le système est dit de **Cramer**: il possède une solution unique donnée par $X = A^{-1}B$.

(En pratique on utilise la méthode du pivot de Gauss; la résolution du système fournit aussi la matrice inverse A^{-1}.)

21. Formules de Cramer. Soit $C_1, ..., C_n$ les colonnes de A. Un système de Cramer $AX = B$ admet toujours une solution unique quel que soit le vecteur B; la solution est donnée par les formules de Cramer

$$x_j = \frac{det(C_1, ..., C_{j-1}, B, C_{j+1}, ...C_n)}{detA}$$

• • *Démonstration.* L'équation $AX = B$ s'écrit $\sum_i x_i C_i = B$, d'où

$det(C_1, ..., C_{j-1}, B, C_{j+1}, ..., C_n) =$

$det(C_1, ..., C_{j-1}, \sum_i x_i C_i, C_{j+1}, ..., C_n) =$

$\sum_i x_i det(C_1, ..., C_{j-1}, C_i, C_{j+1}, ..., C_n) = x_j det(C_1, ..., C_n)$. • •

.

Remarque. La formule de Cramer n'est rien d'autre que la formule pour les éléments de la matrice inverse: $(A^{-1})_{ji} = \frac{1}{detA}\Delta_{ij}$ En effet, l'élément $(A^{-1})_{ji}$ est la j-ème composante du vecteur $A^{-1}e_i$, donc égal à

$\frac{det(C_1,...,C_{j-1},e_i,C_{j+1},...C_n)}{detA} = \frac{1}{detA}\Delta_{ij}$.

.

Cas général: vu que $AX = \sum_i x_i C_i$, l'équation $AX = B$ admet une solution si et seulement si le vecteur B est une combinaison linéaire des colonnes $(C_1, ..., C_n)$; si c'est le cas, à toute solution on peut ajouter une solution de l'équation homogène $AX = 0$, donc un vecteur de $\ker(A)$. L'ensemble des solutions est donc un espace (affine) de dimension $\dim(\ker A) = n-$ rang(A).

.

22. Calcul du déterminant.

Une méthode simple consiste à tuer tous les éléments sauf un dans une ligne (ou une colonne) par des opérations élémentaires sur les colonnes (ou les lignes) qui ne changent pas le déterminant.

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre n. Soit A_{1j} la matrice (d'ordre $n-1$) obtenue en supprimant la première ligne et la $j-$ème colonne de A.

On va utiliser la formule du développement suivant la première ligne:

$detA = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} detA_{1j}$

Soit $C_1, ..., C_n$ les colonnes de A.

Début de l'algorithme: Si la première ligne de A est nulle, alors dét$A = 0$ et c'est fini. Sinon soit $a_{1k} \neq 0$. On modifie les colonnes de A dans le but d'annuler tous les éléments a_{1j} avec $j \neq k$:

.

$C_j \to C'_j = C_j - \frac{a_{1j}}{a_{1k}} C_k$ si $j \neq k$ et $C'_k = C_k$.

.

Ces opérations ne changent pas le déterminant. On obtient une nouvelle matrice $A' = (C'_1, ..., C'_n)$ avec $detA' = detA$ et $a'_{1,j} = 0$ si $j \neq k$ et $a'_{1,k} = a_{1,k}$. [Noter que la colonne C_k ne change pas.]

Donc $detA = detA' = (-1)^{1+k} a_{1k} detA'_{1k}$.

Ensuite on revient au début de l'algorithme avec la matrice A'_{1k} (d'ordre $n-1$) à la place de A.

Le calcul se termine après $n-1$ étapes (au plus tard).

.

23. Matrice diagonale ou triangulaire par blocs.

Proposition. Le déterminant d'une matrice diagonale ou triangulaire par blocs est égal au produit des déterminants de ses blocs diagonaux.

.

23. Déterminant d'un système de vecteurs.

Soit dim$E = n$ et soit $u_1, .., u_n$ une suite de n vecteurs de E. Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. Pour tout j, $j = 1, ..., n$, on écrit $u_j = a_{1j} e_1 + ... + a_{nj} e_n$. Soit $A = (a_{ij})$ la matrice dont les colonnes correspondent aux vecteurs $u_1, .., u_n$. On pose $\det_B(u_1, .., u_n)$ =det$A$ et on l'appelle le **déterminant du système des vecteurs** $u_1, .., u_n$ dans la base B.

Changement de base. Soit B' une autre base de E et P la matrice de passage de la base B vers B'. Alors

$$det_B(u_1, .., u_n) = detP \cdot det_{B'}(u_1, .., u_n)$$

Les propriétés suivantes sont celles du déterminant d'une matrice:

1. $\det_B(u_1, .., u_n)$ est linéaire par rapport à chaque vecteur.

2. $\det_B(u_1, .., u_n)$ change de signe lorsque l'on permute deux vecteurs.

3. $\det_B(u_1, .., u_n) = 0$ si et seulement si la famille $(u_1, .., u_n)$ est liée.

4. $\det_B(u_1, .., u_n) \neq 0$ si et seulement si $(u_1, .., u_n)$ est une base de E.

.

Aire, volume et déterminant.

Soit E un espace vectoriel sur R de dimension n. On suppose connu le concept d'aire ($n = 2$) et de volume ($n \geq 3$) *invariant par translations.*

Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E.

24. Proposition. a) Soit $n = 2$. On définit l'unité d'aire dans E en disant que l'aire du parallelogramme construit sur les vecteurs e_1, e_2 est 1.

Alors pour tout deux vecteurs v_1, v_2 de E l'aire du parallelogramme construit sur ses vecteurs est $\mid det_B(v_1, v_2) \mid$ (ici $B = (e_1, e_2)$).

.

b) Soit $n = 3$. On définit l'unité de volume dans E en disant que l'aire du parallelotope construit sur les vecteurs e_1, e_2, e_3 est 1. Alors pour tout trois vecteurs v_1, v_2, v_3 de E le volume du parallelotope construit sur ses vecteurs est $\mid det_B(v_1, v_2, v_3) \mid$ (ici $B = (e_1, e_2, e_3)$).

.

c) Soit f un endomorphisme de E. Pour toute partie de E de volume (ou aire) fini on a

$volume(f(D)) = \mid det f \mid volume(D)$.

Donc $\mid det f \mid$ est le coefficient de changement du volume (aire) par l'application linéaire f.