**Courbes parametrées**

.

**1.1.** On appelle **courbe paramétrée** (de classe $C^k$) toute application $\gamma$ d'un intervalle $I$ dans $R^n$. Synonymes: *arc paramétré, chemin* ou *mouvement.*

L'image $C = \gamma(I)$ est la **courbe** représentée (ou paramétrée) par $\gamma$.

*Attention:* la même courbe peut être paramétrée de plusieurs façons.

*Exemple:* Le graphe d'une fonction $f : I \to R$ est une courbe dans le plan $(x, y)$ paramétrée par le parametre $x$: $y = f(x)$.

.

**1.2. Droite tangente.** Soit $D(t)$ une famille des droites dépendant d'un parametre $t$ et passant par le même point $M$. On dit que la droite $D$ passant par $M$ et dirigée par le vecteur $u$ est la *limite* de $D(t)$ quand $t \to t_0$ si on peut choisir une famille $u(t)$ de vecteurs directeurs de $D(t)$ telle que $u = \lim_{t \to t_0} u(t)$.

**Définition.** Soit $\gamma$ une courbe paramétrée; supposons que $\gamma(t) \neq \gamma(t_0)$ quand $t$ est proche de $t_0$ ($t \neq t_0$). Soit $D(t)$ la droite passant par les points $\gamma(t_0)$ et $\gamma(t)$. On appelle **droite tangente** de $\gamma$ en $t_0$ la limite (si elle existe) de la famille $D(t)$ quand $t \to t_0$.

La dérivée $\gamma'(t)$ s'appelle **vecteur tangent** (ou *la vitesse*) de la courbe en $t$. Un point $t \in I$ est dit **régulier** si $\gamma'(t) \neq 0$, **singulier** sinon. La courbe est dite **régulière** si tous ses points sont réguliers.

.

**1.3. Lemme.** La droite tangente en un point régulier existe et est dirigée par le vecteur tangent.

*Paramétrisation de la droite tangente.* Si $\gamma'(t_0) \neq 0$, le parametrage naturel de la droite tantente est donnée par $l(t) = \gamma(t_0) + (t_0 - t)\gamma'(t)$ (développement limité de $\gamma$ d'ordre 1).

En cas d'un graphe, $x = t$, $y = f(t)$, le vecteur tangent est $(1, f'(t))$; la tantente est le graphe de la fonction affine $y = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$.

La tangente géométrique existe souvant même en un point singulier.

.

**1.4. Lemme.** Soit $\gamma'(t_0) = 0, \ldots, \gamma^{(k-1)}(t_0) = 0$ et $\gamma^{(k)}(t_0) \neq 0$. Alors la droite tangente en $t_0$ existe et est dirigée par le vecteur $\gamma^{(k)}(t_0)$.

*Remarque* Pour une courbe plane $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ la pente de la tangente est donnée par $\lim_{t \to t_0}(y(t) - y(t_0))/(x(t) - x(t_0))$.

.

**1.5. Position d'une courbe plane par rapport à sa droite tangente au voisinage d'un point régulier $t_0$.**

On écrit le developpement limité de $\gamma(t)$ en $t_0$ à l'ordre 2:

$$\gamma(t) - \gamma(t_0) = (t - t_0)\gamma'(t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2\gamma''(t_0) + o((t - t_0)^2)$$

En prenant la projection sur la droite transversale parallèlement à la droite tangente, on conclut que si $\gamma''(t_0)$ n'est pas colinéaire à $\gamma'(t_0)$, la courbe est située, au voisinage de $t_0$, d'un seul côté de la tangente, dans le demi-plan contenant le vecteur $\gamma''(t_0)$ ( le demi-plan de concavité de $\gamma$ en $t_0$).

Si $\gamma''(t_0)$ est colinéaire à $\gamma'(t_0)$, on poursuit le développement:

$\gamma(t)-\gamma(t_0) = (t-t_0)\gamma'(t_0)+\frac{1}{2}(t-t_0)^2\gamma''(t_0)+\frac{1}{6}(t-t_0)^3\gamma'''(t_0)+o((t-t_0)^3)$.

Dans ce cas, si $\gamma'''(t_0)$ n'est pas colinéaire à $\gamma'(t_0)$, la courbe passe d'un côté de la tangente à l'autre; le point où la courbe traverse la tangete est un **point d'inflexion**.

.

**1.6. Changement de paramètre.**

Soit $\gamma : I \to R^n$ une courbe paramétrée, de classe $C^k$. Soit $J$ un intervalle et $p : J \to I$ une fonction $C^k$ telle que $p'(s) \neq 0$ pour tout $s \in J$ et $p(J) = I$.

La courbe paramétrée $\beta(s) = \gamma(p(s))$ s'obtient de $\gamma$ par le changement de paramètre (reparamétrage) $t = p(s)$. Dans ce cas $\beta$ et $v$ sont des paramétrages *équivalents* de la même courbe.

On a $\frac{d\beta}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{d\gamma}{dt}$. *La droite tangente est invariante par reparamétrage.*

Un paramétrage détermine le *sens de parcours* ou **l'orientation** de la courbe. Un reparamétrage $p$ **préserve l'orientation** si $p$ est une fonction croissante: $p'(s) > 0$.

**1.7. Lemme.** Au voisinage d'un point régulier une courbe de classe $C^k$ est le graphe d'une fonction de classe $C^k$.

.

**1.8. Longueur d'arc.** Soit $\gamma : [a, b] \to R^n$ une courbe paramétrée de classe $C^1$ dans un espace **euclidien**. La **longueur** de la courbe $\gamma$ est définie par

$$L(\gamma) = \int_a^b \parallel \gamma'(t) \parallel dt$$

*Motivation:* Pour toute subdivision $a < t_1 < ... < t_k < b$ considérons la ligne polygonale "inscrite" passant par les sommets $\gamma(a)$, $\gamma(t_1)$, ... $\gamma(t_k)$, $\gamma(b)$.

**1.9. Lemme.** $L(\gamma)$ est la borne supérieure des longueurs des lignes polygonales "inscrites" dans $\gamma$.

.

*En coordonnées cartésiennes:* si $\gamma(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$,

$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x_1'(t)^2 + ... + x_n'(t)^2} dt$

.

Pour un graphe dans le plan, $y = f(x)$, la longueur est
$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'(t)^2} dt.$

La définition de la longueur fait intervenir le paramétrage de la courbe. En fait, le résultat ne dépend pas du paramétrage au sens suivant:

**1.10. Lemme.** La longueur de la courbe est invariante par reparamétrage.

*Remarque.* $L(\gamma) \geq \parallel \gamma(b) - \gamma(a) \parallel$; l'égalité a lieu si et seulement si la courbe est un segment de droite.

.

## Courbes planes

**2.1. Asymptotes des courbes planes.**

Soit $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ une courbe paramétrée dans $R^2$ définie sur l'intervalle $]a, b[$ (il se peut que $b = \infty$).

**Définition.** $\gamma$ admet une **branche infinie** en $b$ si $\parallel \gamma(t) \parallel \to \infty$ quand $t \to b$.

**Définition.** Une droite $D$ est **asymptote** à $\gamma$ en $b$ si $\gamma$ admet une branche infinie en $b$ et la distance de $\gamma(t)$ à $D$ tend vers 0 quand $t \to b$.

**2.2. Lemme.** La courbe $\gamma$ admet la droite définie par l'équation $px + qy + r = 0$ comme asymptote en $b$ si et seulement si $px(t) + qy(t) + r \to 0$ quand $t \to b$.

**Soit** $\mid x(t) \mid \to \infty$**.** Si $px(t) + qy(t) + r \to 0$, alors $q \neq 0$ et en divisant par $q$ on écrit cette condition comme $y(t) = cx(t) + d \to 0$ quand $t \to b$.

L'asymptote est donc caractérisée par deux conditions:

1) la limite $\lim_{t \to b} \frac{y(t)}{x(t)} = c$ existe et

2) la limite $\lim_{t \to b} y(t) - cx(t) = d$ existe.

*Remarque.* La limite $\lim_{t \to b} \frac{y(t)}{x(t)}$, si elle existe, donne la pente de la *direction asymptotique* de la courbe. L'existence d'une direction asymptotique est une condition nécessaire pour l'existence d'une droite asymptotique, mais elle n'est pas suffisante.

.

*Cas d'un graphe* $y = f(x)$, $a < x < b$. Il y a une branche infinie en $b$ si soit $b < \infty$ et $\mid y(t) \mid \to \infty$ quand $t \to b$, soit $b = \infty$. Dans le premier cas il y une asymptote verticale $x = b$. Dans le deuxième cas, $x \to \infty$, il faut étudier les limites $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = c$ et $\lim_{x \to \infty}(f(x) - cx)$.

.

## Coordonnées polaires

**2.3.** Les cordonnées polaires dans $R^2$ sont données par l'application $(r, \varphi) \to (x, y)$ de $R^2$ dans $R^2$: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

Ce n'est pas une bijection; en plus la valeur $r = 0$ est mauvaise ("pôle"). Si on veut définir un système de coordonnées polaires dans $R^2$ il faut choisir un domaine $D$ dans le plan $(x, y)$ et un domaine $D'$ dans le plan $(r, \varphi)$ où l'application polaire donne une bijection, par exemple $r > 0$ et $0 \leq \varphi < 2\pi$.

On définit le repère orthonormé (repère polaire) $(u, v)$ dans $R^2$ :

$u(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ et $v(\varphi) = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$.

Noter que $\frac{du}{d\varphi} = v$ et $\frac{dv}{d\varphi} = -u$.

.

**2.3. Courbe paramérée en coordonnées polaire** est définie par la donnée de deux fonctions $r(t)$ et $\varphi(t)$; son paramétrage en coordonnées cartésiennes sera donc $x(t) = r(t)\cos\varphi(t)$, $y(t) = r(t)\sin\varphi(t)$ ou $\gamma(t) = r(t)u(\varphi(t))$.

Vitesse en coordonnées polaires:

$\gamma'(t) = r'(t)u(\varphi(t)) + r(t)\varphi'(t)v(\varphi(t))$.

.

**2.4. Tangente en pôle** $r = 0$. Soit $r(t_0) = 0$; supposons que $r(t) \neq 0$ quand $t$ est proche mais différent de $t_0$ [c'est le cas si il existe $k > 0$ tel que $\frac{d^k r}{dt^k}(t_0) \neq 0$]. Alors la droite passant par $\gamma(t_0) = 0$ et $\gamma(t) = r(t)u(t)$ est dirigée par le vecteur $u(t)$) et admet une position limite dirigée par le vecteur $u(\varphi(t_0))$. Donc la tangente en $t_0$ existe et fait l'angle $\varphi(t_0)$ avec l'axe des $x$.

**2.5. Courbe donnée par une équation polaire** $r = r(\varphi)$: il s'agit du cas où la courbe est paramérée par $t = \varphi$ du (le "graphe en coordonnées polaires"). Alors

$\gamma'(\varphi) = r'(\varphi)u(\varphi) + r(\varphi)v(\varphi)$.

.

**2.6. La longueur** de la courbe de l'équation $r = r(\varphi)$ est donnée par

$$L(\gamma) = \int_a^b \parallel \gamma'(\varphi) \parallel d\varphi = \int_a^b \sqrt{r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2} d\varphi$$

.

**2.7. Asymptotes.** On suppose que $r(\varphi) \to \infty$ quand $\varphi \to \varphi_0$ (branche infinie en $\varphi_0$). L'angle $\varphi_0$ donne la direction asymptotique.

Une asymptote donc existe si et seulement si la projection du point de coordonnées polaires $(r(\varphi), \varphi)$ sur la droite orthogonale à la direction asymptotique admet une limite quand $\varphi \to \varphi_0$, c'est à dire, si

$r(\varphi)\sin(\varphi - \varphi_0)$ admet une limite quand $\varphi \to \varphi_0$.

.

**2.8. Détermination d'angle.** Malgré le fait que l'angle polaire ne peut pas être défini comme une fonction continue dans tout le plan (privé de 0), toute courbe ne passant pas par 0 admet un paramétrage en coordonnées polaires.

**Lemme.** Soit $\gamma$ une courbe paramétrée de classe $C^k$ qui ne passe pas par 0. Il existe une fonction $\varphi(t)$ de classe $C^k$ telle que $\gamma(t) = (r(t)\cos\varphi(t), r(t)\sin\varphi(t))$. Ici $r(t) = \| \gamma(t) \|$.

Démonstration: on a $x' = r'\cos\varphi + r\varphi'\sin\varphi$ et $y' = r'\sin\varphi - r\varphi'\cos\varphi$, d'où $\varphi' = \frac{xy'-x'y}{x^2+y^2}$. Alors on définit $\varphi(t)$ par intégration:

$\varphi'(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{xy'-x'y}{x^2+y^2}(s)ds$, où $\varphi_0$ est tel que $\gamma(t_0) = (r(t_0)\cos\varphi_0, r(t_0)\sin\varphi_0)$.

Une telle fonction $\varphi(t)$ s'appelle *détermination d'angle* le long de la courbe $\gamma(g)$.

Si $\varphi_1(t)$ est une autre détermination d'angle alors $\varphi_1(t) = \varphi(t) + 2\pi n$, $n \in Z$.

.

**2.9. Ecriture complèxe.** $x + iy = re^{i\varphi}$.

On a $u(\varphi) = e^{i\varphi}$, $v(\varphi) = ie^{i\varphi}$.

$\gamma(t) = r(t)e^{i\varphi(t)}$,

$\gamma' = (r' + ir\varphi')e^{i\varphi}$, etc.

.

### Courbes planes définies par une équation

.

Soit $f$ une fonction (de classe $C^k$) définie dans un ouvert $U$ de $R^2$.

La *courbe définie par l'équation* $f(x,y) = 0$ est l'ensemble

$\Gamma = \{(x,y) \in U : f(x,y) = 0\}$.

**2.10. Théorème de la fonction implicite**. Soit $f(a,b) = 0$ et $(\partial f/\partial y)(a,b) \neq 0$. Alors il existe un ouvert $U'$ contenant $(a,b)$ sur lequel l'équation $f(x,y) = 0$ définisse $y$ comme une fonction $\varphi$ de classe $C^k$: $\varphi(x)$ est définie sur un intervalle $I$ et $(x,y) \in U'$ vérifie $f(x,y) = 0$ si et seulement si $y = \varphi(x)$.

Donc la partie $\Gamma \cap U'$ de $\Gamma$ est le graphe de la fonction $\varphi(x)$, un arc régulier.

On ne connais pas $\varphi$ exactement (c'est une "fonction implicite") mais on peut calculer les dérivées de $\varphi$ en $a$ en dérivant l'identité $f(x,\varphi(x)) = 0$.

Cela donne $\varphi' = -f_x/f_y$ et $\varphi'' = -(f_{xx} + 2\varphi' f_{xy} + \varphi'^2 f_{yy})/f_y$ (rappelons que $y = \varphi(x)$).

Symétriquement, si $(\partial f/\partial x)(a,b) \neq 0$, on peut résoudre $f(x,y) = 0$ pour $x$ en fonction de $y$: $x = \psi(y)$ (au voisinage de $(a,b)$.

Un point de $\Gamma$ est dit **régulier** si $df_{(a,b)} \neq 0$ (si les dérivées partielles de $f$ ne s'ennulent pas en même temps). Par conséquent, au voisinage d'un point réguler $\Gamma$ peut être paramétrée comme une courbe régulière.

La tangente en un point régulier $(a, b)$ est orthogonale au gradient de $f$ en $(a, b)$ et a comme équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) = 0$$