Université Lyon 1
Classes préparatoires 2015-2016
Algèbre linéaire
Serge Parmentier

Chapitres 5. Les matrices (suite)

5. Changement de base

Dans cette section, on établit le lien entre les matrices de vecteurs et d'applications linéaires rapportées à des bases différentes.

Soit un $\mathbf{K}-$ espace E. Si l'on se donne deux bases $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathbf{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ de E, on peut exprimer les vecteurs de $\mathbf{e}'$ dans la base $\mathbf{e}$, i.e. écrire $Mat_{\mathbf{e}}(\mathbf{e}')$, et exprimer les vecteurs de $\mathbf{e}$ dans la base $\mathbf{e}'$, i.e. écrire $Mat_{\mathbf{e}'}(\mathbf{e})$.
[Pour rappel, si $e'_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} e_i$, $j \in \{1, \dots, n\}$, alors $Mat_{\mathbf{e}}(\mathbf{e}') := (p_{ij}) \in M_n(\mathbf{K})$ est la matrice carrée de taille n dont la $j-$ième colonne est constituée des composantes de e'_j dans la base $\mathbf{e}$.]

Définition: La *matrice de passage* de $\mathbf{e}$ vers $\mathbf{e}'$ est la matrice

$$P_{\mathbf{e} \mapsto \mathbf{e}'} = Mat_{\mathbf{e}}(\mathbf{e}').$$

Une autre écriture (très utile) de cette matrice est $P_{\mathbf{e} \mapsto \mathbf{e}'} = Mat_{\mathbf{e}', \mathbf{e}}(id_E)$. *Attention à l'inversion de l'ordre des bases dans cette écriture.*

Passage inverse: la matrice $P_{e \mapsto e'}$ est inversible, d'inverse $P_{e' \mapsto e}$.
preuve: On utilise la compatibilité de la composition des applications et du produit matriciel pour le diagramme

$$\begin{array}{rccccc} & E & \xrightarrow{id_E} & E & \xrightarrow{id_E} & E \\ \textit{avec choix de bases:} & \mathbf{e} & & \mathbf{e}' & & \mathbf{e} \end{array}$$

On a

$$P_{e \mapsto e'} P_{e' \mapsto e} = Mat_{e', e}(id_E) Mat_{e, e'}(id_E) = Mat_{e,e}(id_E \circ id_E) = Mat_{e,e}(id_E) = 1_n.$$

En échangeant $\mathbf{e}$ et $\mathbf{e}'$, on a de même $P_{e' \mapsto e} P_{e \mapsto e'} = Mat_{e', e'}(id_E) = 1_n$.

Exemple: pour $E = \mathbf{R}^2$ et les bases $\mathbf{e} = ((1,0),(0,1))$ et $\mathbf{e}' = ((1,1),(-1,1))$, on a

$$e'_1 = e_1 + e_2,\ e'_2 = -e_1 + e_2, \quad Mat_{\mathbf{e}}(\mathbf{e}') = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = P_{e \mapsto e'}$$

$$e_1 = \frac{1}{2} e'_1 - \frac{1}{2} e'_2,\ e_2 = \frac{1}{2} e'_1 + \frac{1}{2} e'_2, \quad Mat_{\mathbf{e}'}(\mathbf{e}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = P_{e' \mapsto e}$$

$$P_{e \mapsto e'} P_{e' \mapsto e} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P_{e' \mapsto e} P_{e \mapsto e'}.$$

Formules de changement de base

(1) *pour un vecteur*:

$$Mat_e(u) = P_{e\mapsto e'} Mat_{e'}(u).$$

(2) *pour un endomorphisme*:

$$Mat_{e,f}(\phi) = P_{f\mapsto f'} Mat_{e',f'}(\phi) P_{e'\mapsto e}$$

preuve:

(1) C'est un cas particulier de la formule $Mat_{\mathbf{f}}(\phi(u)) = Mat_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(\phi) Mat_{\mathbf{e}}(u)$ pour une application linéaire $\phi : E \to F$, avec ici $E = F$ et $\phi = id_E$.

On a $P_{e\mapsto e'} Mat_{e'}(u) = Mat_{e',e}(id_E) Mat_{e'}(u) = Mat_e(id_E(u)) = Mat_e(u)$.

(2) Ecrire le diagramme

$$\begin{array}{rcccc} & E \xrightarrow{id_E} & E \xrightarrow{\phi} & F \xrightarrow{id_F} & F \\ \textit{avec choix de bases:} & \mathbf{e} & \mathbf{e}' & \mathbf{f}' & \mathbf{f} \end{array}$$

On a

$$Mat_{e,f}(\phi) = Mat_{e,f}(id_F \circ \phi \circ id_E) = Mat_{f',f}(id_F) Mat_{e',f'}(\phi) Mat_{e,e'}(id_E),$$

i.e.

$$Mat_{e,f}(\phi) = P_{f\mapsto f'} Mat_{e',f'}(\phi) P_{e'\mapsto e}.$$

Exemple: prenons $E = \mathbf{R}^2$ avec les bases $\mathbf{e} = ((1,0),(0,1))$ et $\mathbf{e}' = ((1,1),(-1,1))$.

1. *Matrices de* $u = (x_1, x_2) \in E$:

Dans la base canonique $\mathbf{e}$, on a $u = x_1e_1 + x_2e_2$, $Mat_{\mathbf{e}}(u) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Dans la base $\mathbf{e}'$, par la formule de changement de base, on a

$$Mat_{\mathbf{e}'}(u) = P_{e'\mapsto e} Mat_{\mathbf{e}}(u) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1+x_2}{2} \\ \frac{-x_1+x_2}{2} \end{pmatrix}.$$

On obtient aussi ces composantes en résolvant pour a, b l'équation $(x_1, x_2) = ae'_1 + be'_2$: $(x_1, x_2) = (a, a) + (-b, b) = (a - b, a + b)$, i.e. $a = \frac{x_1+x_2}{2}, b = \frac{-x_1+x_2}{2}$.

2. *Matrices de l'application linéaire* $\phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 : (x_1, x_2) \mapsto (ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2)$:

$Mat_{\mathbf{e},\mathbf{e}}(\phi) : \phi(1,0) = (a,c), \phi(0,1) = (b,d)$,

$$Mat_{\mathbf{e},\mathbf{e}}(\phi) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

$Mat_{\mathbf{e},\mathbf{e}'}(\phi) : \phi(1,0) = (a,c) = \frac{a+c}{2}(1,1) + \frac{c-a}{2}(-1,1)$, $\phi(0,1) = (b,d) = \frac{b+d}{2}(1,1) + \frac{d-b}{2}(-1,1)$,

$$Mat_{\mathbf{e},\mathbf{e}'}(\phi) = \begin{pmatrix} \frac{a+c}{2} & \frac{b+d}{2} \\ \frac{c-a}{2} & \frac{d-b}{2} \end{pmatrix}.$$

On obtient aussi cette matrice par la formule de changement de base

$$Mat_{\mathbf{e},\mathbf{e}'}(\phi) = P_{e'\mapsto e} Mat_{\mathbf{e},\mathbf{e}}(\phi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a+c}{2} & \frac{b+d}{2} \\ \frac{c-a}{2} & \frac{d-b}{2} \end{pmatrix}.$$

6. Rang d'une matrice.

A toute matrice $A \in M_{m,n}(\mathbf{K})$, on associe l'application linéaire

$$\begin{aligned} \phi_A : & M_{n,1}(\mathbf{K}) \to M_{m,1}(\mathbf{K}) \\ X = & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto AX = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exemple 1. $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, $m = 2$ et $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $\phi_A(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \end{pmatrix}$.

Notons $E_{j1}^{(n)} \in M_{n,1}(\mathbf{K})$ la matrice colonne dont la seule composante non nulle est la $j-$ième qui vaut 1. Observer que $\phi_A(E_{j1}^{(n)}) = AE_{j1}^{(n)}$ est la $j-$ième colonne $C_j \in M_{m,1}(\mathbf{K})$ de A. Dès lors, la matrice de ϕ_A rapportée aux bases canoniques $(E_{j1}^{(n)}, 1 \leq j \leq n)$ de $M_{n,1}(\mathbf{K})$ et $(E_{i1}^{(m)}, 1 \leq i \leq m)$ de $M_{m,1}(\mathbf{K})$ est la matrice A.

Exemple 1 bis. Dans l'exemple 1, $\phi_A(E_{11}^{(3)}) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Définition: On pose
- $Im(A) = Im(\phi_A)$ et $Ker(A) = Ker(\phi_A)$.
- $rang(A) = rang(\phi_A) = dim(Im(\phi_A))$.

Remarques:
1. *Majoration sur le rang de A:*
Comme $Im(A) \subset M_{m,1}(K)$, on a $rang(A) \leq m$. Par le théorème du rang, $rang(A) = n - dim(Ker(A)) \leq n$. Dès lors, $rang(A) \leq min(m, n)$.
2. Par définition $Im(A) = Vect(\phi_A(E_{11}^{(n)}), \ldots, \phi_A(E_{n1}^{(n)})) = Vect(C_1, C_2, \ldots, C_n)$, i.e. $rang(A)$ est le rang de la famille constituée des n colonnes de A.

Invariance du rang: soit $A \in M_{m,n}(\mathbf{K})$. Pour toutes matrices inversibles $P \in Gl_m(\mathbf{K})$ et $Q \in Gl_n(\mathbf{K})$, les matrices PA et AQ ont même rang que A.
preuve:
1. Mq $rang(AQ) = rang(A)$: On a $Im(AQ) \subset Im(A)$ donc $rang(AQ) \leq rang(A)$.
En remplacant A par AQ et Q par Q^{-1}, le même argument donne $rang(A) = rang(AQQ^{-1}) \leq rang(AQ)$. D'où l'égalité.
2. Mq $rang(PA) = rang(A)$: l'inclusion $Ker(A) \subset Ker(PA)$ implique

$$dimKer(A) \leq dimKer(PA)$$

et par le théorème du rang

$$rang(A) = n - dim(Ker(A)) \geq n - dim(Ker(PA)) = rang(PA).$$

En remplacant A par PA et P par P^{-1}, le même argument donne $rang(PA) \geq rang(P^{-1}(PA)) = rang(A)$. D'où l'égalité.

Pour $r \leq min(m,n)$, soit

$$I_{(r,0)} = \begin{pmatrix} 1_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbf{K}),$$

la matrice échelon unité standard de rang r.

Exemple: $I_{(2,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbf{K})$.

Forme normale en rang r: soient E et F des $\mathbf{K}-$ espaces de bases $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$ et soit $\phi : E \to F$ un application linéaire de rang r. Alors il existe une base $\mathbf{e}'$ de E et une base $\mathbf{f}'$ de F telles que

$$Mat_{e',f'}(\phi) = I_{(r,0)}.$$

Esquisse de preuve: par le théorème du rang la dimension de $Ker(\phi)$ vaut $n-r$. Prendre une base $(e'_{r+1}, \dots, e'_n)$ de $Ker(\phi)$ et la compléter en une base

$$\mathbf{e}' = (e'_1, \dots, e'_r, e'_{r+1}, \dots, e'_n)$$

de E. La famille $(f'_1 = f(e'_1), \dots, f'_r = f(e'_r))$ est alors une base de $Im(\phi)$ que l'on complète en une base

$$\mathbf{f}' = (f'_1, \dots, f'_r, f'_{r+1}, \dots, f'_m)$$

de F. Dans ces bases la matrice de ϕ a la forme annoncée: en effet, cette matrice s'obtient en écrivant en colonne les composantes des images $\phi(e'_1) = f'_1, \dots, \phi(e'_r) = f'_r$ et $\phi(e'_{r+1}) = \vec{0}_F, \dots, \phi(e'_n) = \vec{0}_F$ dans la base $\mathbf{f}'$, i.e. $Mat_{e',f'}(\phi) = I_{(r,0)}$.

Voici la version matricielle de ce résultat:

Forme normale matricielle: Une matrice $A \in M_{m,n}(\mathbf{K})$ est de rang r ssi il existe deux matrices inversibles $P \in Gl_m(\mathbf{K})$ et $Q \in Gl_n(\mathbf{K})$ telles que

$$A = PI_{(r,0)}Q.$$

Esquisse de preuve: Supposons $A = PI_{(r,0)}Q$. On sait que $rang(I_{(r,0)}) = r$; P, Q étant inversibles, $rang(A) = rang(PI_{(r,0)}Q) = rang(I_{(r,0)}) = r$.

Supposons A de rang r. L'application $\phi_A : M_{n,1}(\mathbf{K}) \to M_{m,1}(\mathbf{K}) : X \mapsto AX$ est de rang r. Par la proposition, dans des bases adéquates $\mathbf{e}'$ de $E = M_{n,1}(\mathbf{K})$ et $\mathbf{f}'$ de $F = M_{m,1}(\mathbf{K})$, on a

$$Mat_{\mathbf{e}',\mathbf{f}'}(\phi_A) = I_{(r,0)}.$$

Notons $\mathbf{e} = (E^{(n)}_{j1}, 1 \leq j \leq n)$ et $\mathbf{f} = (E^{(m)}_{i1}, 1 \leq i \leq m)$ les bases canoniques de $M_{n,1}(\mathbf{K})$ et $M_{m,1}(\mathbf{K})$. On sait déjà que $A = Mat_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(\phi_A)$. La formule de changement de bases s'écrit

$$A = Mat_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(\phi_A) = P_{f \mapsto f'} Mat_{\mathbf{e}',\mathbf{f}'}(\phi_A) P_{e' \mapsto e}$$

et il suffit de prendre les matrices inversibles $P = P_{f\mapsto f'}, Q = P_{e'\mapsto e}$.

Rang et inversibilité: Une matrice $A \in M_n(\mathbf{K})$ est inversible ssi $rang(A) = n$.

preuve: si A est inversible $rang(A) = rang(AA^{-1}) = rang(1_n) = n$.
Si $rang(A) = n$, il existe P, Q inversibles telles que $A = PI_{(n,0)}Q = P1_nQ = PQ$ et $A^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$.

Calcul matriciel et transformations élémentaires.

Dans cette section, on montre que l'on peut réaliser les opérations élémentaires sur les lignes (resp. les colonnes) d'une matrice A par multiplication à gauche (resp. à droite) de A par des matrices inversibles simples de trois types: *les dilatations, les transvections et les permutations.* En particulier, les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes de A ne changent pas le rang de A.

Ces matrices seront utilisées dans le chapitre suivant.

Pour un entier $m \in N \setminus \{0\}$, on désigne par $(E_{ij}^{(m)})_{(i,j)\in\{1,\ldots,m\}^2}$ la base canonique de $M_m(\mathbf{K})$. Pour rappel, les composantes de $E_{ij}^{(m)}$ sont nulles sauf la composante ij qui est égale à 1.

Voici la liste des matrices de transformations élémentaires.

Matrices de dilatation: pour $\alpha \in \mathbf{K} \setminus \{0\}$ et $i \in \{1, \ldots, m\}$, $D_i(\alpha)$ est la matrice diagonale

$$D_i^{(m)}(\alpha) = \sum_{k\in\{1,\ldots,m\}\setminus\{i\}} E_{kk}^{(m)} + \alpha E_{ii}^{(m)}.$$

Exemple: $D_2^{(3)}(\alpha) = E_{11}^{(3)} + E_{33}^{(3)} + \alpha E_{22}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Matrices de transvection: pour $\lambda \in \mathbf{K}, (i,j) \in \{1, \ldots, m\}^2, i \neq j$,

$$T_{i,j}^{(m)}(\lambda) = 1_m + \lambda E_{ij}^{(m)}.$$

Exemple: $T_{1,3}^{(3)}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Matrices de permutation: pour $(i,j) \in \{1, \ldots, m\}^2, i < j$,

$$P_{i,j}^{(m)} = P_{j,i}^{(m)} = \sum_{k\in\{1,\ldots,m\}\setminus\{i,j\}} E_{kk}^{(m)} + E_{ij}^{(m)} + E_{ji}^{(m)}.$$

Exemple: $P_{2,3}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Ces matrices sont inversibles et on a

$$(D_i^{(m)}(\alpha))^{-1} = D_i^{(m)}(\frac{1}{\alpha}), \quad (T_{i,j}^{(m)}(\lambda))^{-1} = T_{i,j}^{(m)}(-\lambda), \quad (P_{i,j}^{(m)})^{-1} = P_{i,j}^{(m)}.$$

Soit $A \in M_{m,n}(\mathbf{K})$ dont la colonne j est notée C_j et la ligne i est notée L_i.

Par calcul, on vérifie que la multiplication de A à gauche (resp. à droite) par ces matrices particulières équivaut à effectuer sur les lignes (resp. les colonnes) de A les opérations élémentaires suivantes:

$D_i^{(m)}(\alpha)A$: *remplacer* L_i *par* αL_i; $AD_i^{(n)}(\alpha)$: *remplacer* C_i *par* αC_i;

$T_{i,j}^{(m)}(\lambda)A$: *remplacer* L_i *par* $L_i + \lambda L_j$; $AT_{i,j}^{(n)}(\lambda)$: *remplacer* C_i *par* $C_j + \lambda C_i$;

$P_{i,j}^{(m)}A$: *échanger les lignes* L_i *et* L_j; $AP_{i,j}^{(n)}$: échanger les colonnes C_i et C_j.

Par la proposition sur l'invariance du rang d'une matrice A (pour rappel $rang(A) = rang(PA) = rang(AQ)$ lorsque P et Q sont inversibles), ces observations impliquent que les transformations élémentaires ne changent pas le rang de A.

Voici une application au calcul de l'inverse d'une matrice inversible $A \in Gl_n(\mathbf{K})$:

Supposons qu' une suite $T_1, \ldots, T_r$ de transformations élémentaires sur les lignes de A transforme A en la matrice unité 1_n, alors la même suite transforme la matrice unité 1_n en la matrice inverse A^{-1}: en effet, par unicité de l'inverse, si $T_r T_{r-1} \cdots T_1 A = 1_n$, alors $A^{-1} = T_r T_{r-1} \cdots T_1 = T_r T_{r-1} \cdots T_1 1_n$.