Université Lyon 1
Classes préparatoires 2015-2016
Algèbre linéaire
Serge Parmentier

Chapitres 7. Les déterminants

Ce résumé est proche du cours de printemps 2015 de J. Germoni.

Soit $\mathbf{K}$ un corps et $A \in M_n(\mathbf{K})$ une matrice carrée d'ordre $n \in N \setminus \{0\}$.

Pour tout couple d'indices $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, on désigne par $A_{ij} \in M_{n-1}(\mathbf{K})$ la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A:

$$A_{ij} := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Déterminant: on définit le déterminant

$$det_n : M_n(\mathbf{K}) \to \mathbf{K}$$

par récurrence sur $n \in N \setminus \{0\}$ en posant

$$det_1(a) = a, \quad a \in \mathbf{K}$$
$$det_n(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} a_{1j}\, det_{n-1}(A_{1j}), \quad n \geq 2$$

Exemples:

1. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $A_{11} = (a_{22})$, $A_{12} = (a_{21})$.

$$det_2(A) = a_{11} det_1(A_{11}) - a_{12} det_1(A_{12}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

2. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $A_{12} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$, $A_{13} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} det_3(A) &= a_{11}\, det_2(A_{11}) - a_{12}\, det_2(A_{12}) + a_{13}\, det_2(A_{13}) \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}). \end{aligned}$$

Notation: par la suite, on omet l'indice n, i.e. on écrit $det(A)$ au lieu de $det_n(A)$.

3. *Les matrices triangulaires et les matrices diagonales*

Une matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{K})$ est dite
triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ pour tout (i, j) tel que $i > j$.
triangulaire inférieure si $a_{ij} = 0$ pour tout (i, j) tel que $i < j$.

De telles matrices possèdent des *triangles de zéros*: par exemple, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure.

Propriété: le déterminant d'une matrice triangulaire $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{K})$ est le produit de ses éléments diagonaux:

$$det(A) = \Pi_{i=1}^n a_{ii} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$$

preuve: on procède par récurrence sur n en traitant séparément les matrices triangulaires inférieures et supérieures:

C'est vrai pour $n = 1$.

Soit $n \geq 2$. Supposons vrai pour toute matrice triangulaire inférieure d'ordre $n - 1$ et soit A triangulaire inférieure d'ordre n. On a

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} a_{1j} det(A_{1j}) = a_{11} det(A_{11}),$$

car $a_{1j} = 0$ pour tout $j \in \{2, \dots n\}$. A_{11} s'obtient en supprimant la première ligne et la première colonne de A, i.e.

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

est triangulaire inférieure d'ordre $n - 1$. Par hypothèse de récurrence, on a

$$det(A) = a_{11} \Pi_{i=2}^n a_{ii} = \Pi_{i=1}^n a_{ii}.$$

Le cas des matrices triangulaires supérieures est analogue: pour A d'ordre n on a

$$det(A) = a_{11} det(A_{11}) + \sum_{j=2}^{n} (-1)^{j-1} a_{1j} det(A_{1j})$$

avec cette fois $a_{1j}, j \in \{2, \dots, n\}$ non nécessairement nuls.

On observe que les matrices A_{1j} sont triangulaires supérieures d'ordre $n - 1$. De plus, lorsque $j \geq 2$, le premier élément diagonal de A_{1j} est nul. Par hypothèse de récurrence, on a

$$det(A_{11}) = \Pi_{i=2}^n a_{ii}, \quad det(A_{1j}) = 0, \text{ pour tout } j \geq 2,$$

et $det(A) = a_{11}det(A_{11}) = \Pi_{i=1}^n a_{ii}$.

Pour rappel, une matrice $D = (d_{ij}) \in M_n(\mathbf{K})$ est dite *diagonale* si $d_{ij} = 0$ pour tout couple (i, j) tel que $i \neq j$. Une telle matrice est *visuellement une diagonale*

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Etant en particulier triangulaire (inf et sup) on a

$$det(D) = \Pi_{i=1}^n d_{ii}.$$

En particulier $det(1_n) = 1$ et $det(O) = 0$.

Deux familles utiles (cf chapitre 5):

Les matrices de *transvections* $T_{i,j}^{(n)}(\lambda) = 1_n + \lambda E_{ij}^{(n)}$ sont triangulaires et $det(T_{i,j}^{(n)}(\lambda)) = 1$.

Les matrices de *dilatations* $D_i^{(n)}(\alpha) = \sum_{j\neq i} E_{jj}^{(n)} + \alpha E_{ii}^{(n)}$ sont diagonales et $det(D_i^{(n)}(\alpha)) = \alpha$.

Notre définition du déterminant utilise un développement suivant la première ligne. Cette définition implique que si la première ligne de A est nulle, alors $det(A) = 0$. Qu'en est-il des autres lignes?

Propriété: Si une ligne de $A \in M_n(\mathbf{K})$ est nulle alors $det(A) = 0$.

preuve: par récurrence finie sur l'indice i de ligne de A:

C'est vrai par définition lorsque $i = 1$ pour tout n.

Soit $i \geq 2$. On suppose vrai pour toute matrice dont la $i - 1$ ième ligne est nulle et tout n. Soit alors $A \in M_n(\mathbf{K})$ dont la $i-$ième ligne est nulle. On a

$$det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} a_{1j}\, det(A_{1j}).$$

Pour $j \in \{1, \dots n\}$, la ligne $i - 1$ de A_{1j} est constituée de $n - 1$ éléments de la ligne i de A; elle est donc nulle. Par hypothèse de récurrence $det(A_{1j}) = 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ et donc $det(A) = 0$.

On va admettre le résultat qui suit

Théorème: soit $n \in N \setminus \{0\}$. L'application déterminant est l'unique application

$$\Delta : M_n(\mathbf{K}) \to \mathbf{K}$$

telle que

(i) pour tout $(A, B) \in M_n(\mathbf{K})^2$, $\Delta(AB) = \Delta(A)\Delta(B)$

(ii) pour toute matrice diagonale $D = (d_{ij})$, $\Delta(D) = \Pi_{i=1}^n d_{ii}$.

paraphrase: l'application $A \mapsto det(A)$ que nous avons définie satisfait à (i) et (ii) et si une application Δ satisfait à (i) et (ii), alors $\Delta = det$.

En voici une conséquence immédiate et importante:
Déterminant des inversibles:
(i) Si A est inversible, alors $det(A) \neq 0$ et $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$.
(ii) Pour toute matrice inversible $P \in Gl_n(\mathbf{K})$ et tout $A \in M_n(\mathbf{K})$, on a $det(PAP^{-1}) = det(A)$.

preuve: (i) $1 = det(1_n) = det(AA^{-1}) = det(A)det(A^{-1})$.
(ii) $det(PAP^{-1}) = det(P)det(A)det(P^{-1}) = det(P)det(P^{-1})det(A) = det(A)$.

L'essentiel du reste du chapitre a pour but de faire la liste des propriétés du déterminant et d'en extraire des techniques de calcul.

Déterminant et transformations élémentaires:
Si A' est obtenue de A
(i) en ajoutant à une ligne (resp. à une colonne) de A une combinaison linéaire des autres lignes (resp. des autres colonnes) de A, alors $det(A') = det(A)$.
(ii) en multipliant une ligne (resp. une colonne) de A par un scalaire $\alpha \in \mathbf{K}$, alors $det(A') = \alpha\, det(A)$.
(iii) en échangeant deux lignes (resp. deux colonnes) de A, alors $det(A') = -det(A)$.

preuve pour les lignes:
(i) $A' = T_r \cdots T_1 A$ où les T_i sont des matrices de transvections de déterminant 1; d'où $det(A') = det(T_r \cdots T_1 A) = det(T_r) \cdots det(T_1)det(A) = det(A)$.
(ii) $A' = D_i(\alpha)A$ où $D_i(\alpha)$ est une matrice de dilatation; d'où $det(A') = det(D_i(\alpha))det(A) = \alpha\, det(A)$.
(iii) $A' = P_{i,j}A$ où $P_{i,j}$ est une matrice de permutation. L'écriture

$$P_{i,j} = D_i(-1)T_{i,j}(-1)T_{j,i}(1)T_{i,j}(-1)$$

donne $det(P_{i,j}) = det(D_i(-1)) = -1$ et $det(A') = -det(A)$.
C'est analogue pour les colonnes par multiplication à droite par des matrices de transformations élémentaires.

Remarque: la propriété (iii) est fondamentale; on dit que le déterminant est alterné. Dans la présentation classique, le déterminant est défini en déclarant que c'est l'unique application de $M_n(\mathbf{K})$ vers $\mathbf{K}$ qui est linéaire en chaque colonne de A, alternée en ces colonnes et vaut 1 sur la matrice unité .

Transposition
La *transposée* d'une matrice $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbf{K})$ est la matrice ${}^tA = (a'_{ij}) \in M_{n,m}(\mathbf{K})$ définie par $a'_{ij} = a_{ji}$ pour tout $(i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2$.
Autrement dit: la transposée de la matrice A est *la matrice ${}^tA$ dont les colonnes sont les lignes de* A.

Exemples: ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Propriétés de la transposition: la transposition $M_{m,n}(\mathbf{K}) \to M_{n,m}(\mathbf{K}) : A \mapsto^t A$ est une application linéaire, i.e. pour tout $A, B \in M_{m,n}(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$, on a

$${}^t(A + B) =^t A +^t B, \quad {}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA.$$

De plus, pour tout $A \in M_{m,n}(\mathbf{K})$ et $B \in M_{n,p}(\mathbf{K})$, on a ${}^t(AB) = {}^t B\, {}^t A$.

Déterminant de la transposée: pour tout $A \in M_n(\mathbf{K})$, on a $det({}^t A) = det(A)$.

preuve: on va mq l'application $\Delta : M_n(\mathbf{K}) \to \mathbf{K} : A \mapsto det({}^t A)$ satisfait aux deux conditions du théorème (admis) caractérisant le déterminant.

Pour la condition (i), on a

$$\Delta(AB) = det({}^t(AB)) = det({}^t B {}^t A) = det({}^t B) det({}^t A) = det({}^t A) det({}^t B) = \Delta(A)\Delta(B).$$

Pour la condition (ii), si D est diagonale, on a ${}^t D = D$ et dès lors $\Delta(D) = \Pi_{i=1}^n d_{ii}$.

Par l'unicité dans le théorème, il vient $det({}^t A) = det(A)$.

Le résultat qui suit est particulièrement utile pour les calculs

Développement du déterminant: Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{K})$.

- *suivant une ligne*: quelquesoit l'indice de ligne $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}).$$

- *suivant une colonne*: quelquesoit l'indice de colonne $j \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}).$$

En particulier le déterminant est linéaire en chaque ligne et en chaque colonne de A.

preuve pour les lignes: pour $i = 1$, c'est notre définition (observer que $(-1)^{j-1} = (-1)^{1+j}$).

Pour $i = 2$, posons $A' = P_{12}^{(n)} A$ (A' est obtenue de A en échangeant les lignes et 1 et 2). On sait que $det(A') = -det(A)$ et, par définition,

$$det(A') = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} a'_{1j} det A'_{1j}.$$

Mais $a'_{1j} = a_{2j}$ et $A'_{1j} = A_{2j}$ et on a

$$det(A) = -det(A') = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+2} a_{2j} det A_{2j}$$

(car $(-1)^{j-1} = (-1)^{j+1}$).

Pour $i \geq 3$, on commence par poser à nouveau $A' = P_{1i}^{(n)} A$ (A' s'obtient en échangeant les lignes 1 et i de A). Dans l'écriture $det(A') = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} a'_{1j} det(A'_{1j})$, on a bien $a'_{1j} = a_{ij}$ mais cette fois $A'_{1j} = P_{i-2 i-1}^{(n-1)} \cdots P_{12}^{(n-1)} A_{ij}$, d'où

$$\begin{aligned} det(A) = -det(A') &= -\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} a_{ij} det(P_{i-2\, i-1}^{(n-1)} \cdots P_{12}^{(n-1)} A_{ij}) \\ &= -\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} a_{ij} (-1)^{i-2} det(A_{ij}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j-2} a_{ij} det(A_{ij}). \end{aligned}$$

C'est bien l'énoncé ($(-1)^{i+j-2} = (-1)^{i+j}$).

Pour obtenir le développement suivant les colonnes, utiliser les lignes pour ${}^tA$.

Utilisation du déterminant.

Le critère d'inversibilité qui suit est *important*:

1. Critère d'inversibilité: $A \in M_n(\mathbf{K})$ est inversible ssi $det(A) \neq 0$.
preuve: on sait déjà que l'existence de A^{-1} implique $det(A) \neq 0$.
Pour la réciproque on procède par contraposition: supposons A non inversible. Dans ce cas, rang $(A) < n$ et l'une des colonnes de A, disons C_l, est combinaison linéaire des autres colonnes de A: $C_l = \sum_{j\neq l} \lambda_j C_j$. Par transformations élémentaires sur les colonnes, on a

$$\begin{aligned} Det(A) &= det\,(\,C_1 \quad \cdots \quad C_l \quad \cdots \quad C_n\,) \\ &= det\,(\,C_1 \quad \cdots \quad C_l - \textstyle\sum_{j\neq l} \lambda_j C_j \quad \cdots \quad C_n\,) \\ &= det\begin{pmatrix} C_1 & \cdots & \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \cdots & C_n \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. Co-matrice et inverse

On appelle co-matrice de $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{K})$ la matrice $com(A) = (c_{ij}) \in M_n(\mathbf{K})$ définie par

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} det(A_{ij}).$$

Exemple: pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ on a

$$\begin{aligned} com(A) &= \begin{pmatrix} det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & -det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ -det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & -det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & -det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Voici la propriété principale de $com(A)$ (preuve omise ici).
Propriété: pour tout $A \in M_n(\mathbf{K})$, $A\,{}^tcom(A) = det(A)1_n = {}^tcom(A)A$.

En particulier, pour toute matrice inversible A, on a

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\,{}^tcom(A).$$

Exemple: pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $det(A) = 4$ et $A^{-1} = \frac{1}{4} {}^t com(A) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Remarque: le calcul de l'inverse de A par la co-matrice est utilisé pour les matrices d'ordre 3, mais la complexité du calcul de com(A) croit rapidement avec l'ordre n de A.

3. Système de Cramer

Soit $A \in M_n(\mathbf{K})$. Le système linéaire

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (S)$$

est dit de Cramer si A est une matrice inversible. L'unique solution est alors donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

On dispose aussi de formules explicites (dites de Cramer) pour les composantes $x_i, 1 \leq i \leq n$, de cette unique solution.
Ces formules présentent un intérêt théorique, toutefois, elles ne sont pas utilisées dans la résolution concrète des systèmes linéaires dès que $n \geq 4$.

Ecrivons A en termes de ses colonnes $A = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{pmatrix}$ et notons $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Formules de Cramer: les composantes de la solution du système de Cramer (S) sont données par

$$x_i = \frac{det \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_{i-1} & B & C_{i+1} & \cdots & C_n \end{pmatrix}}{det(A)}, \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

(Preuve omise ici.)

Calculs de déterminants

Pour calculer un déterminant d'ordre $n = 3$, on choisit une ligne ou une colonne et on développe.

Exemple: pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, en développant suivant la première colonne, on a

$$\begin{aligned} det(A) &= 2\, det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2(4-1) - (2-1) + (1-2) \\ &= 4. \end{aligned}$$

Peu importe ici le choix de la ligne ou de la colonne car le calcul est simple.

Par contre, pour les matrices d'ordre n grand, on commence, en se servant de transformations élémentaires, par faire apparaitre une ligne ou une colonne comportant de nombreux zéros et l'on développe ensuite suivant cette ligne ou cette colonne.

Exemple: la matrice A du premier exemple se généralise comme suit: soient a et b deux scalaires et B la matrice

$$B = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & \cdots & b \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & \cdots & b & a \end{pmatrix}$$

(deux triangles pleins de b et une diagonale de a.) On commence par faire la substitution de colonne $C_1 + \sum_{j=2}^{n} C_j \mapsto C_1$ pour obtenir

$$det(B) = det \begin{pmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a+(n-1)b & b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$$

ce qui s'écrit, par linéarité du déterminant en chaque colonne,

$$det(B) = (a+(n-1)b)\, det \begin{pmatrix} 1 & b & \cdots & \cdots & b \\ 1 & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 1 & b & \cdots & b & a \end{pmatrix}.$$

Il suffit alors de faire les substitutions de lignes $L_2 - L_1 \mapsto L_2, \ldots, L_n - L_1 \mapsto L_n$ pour faire apparaitre une colonne presque nulle:

$$det(B) = (a+(n-1)b)\, det \begin{pmatrix} 1 & b & \cdots & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & a-b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{pmatrix}.$$

Il se fait que, dans cet exemple, on a obtenu une matrice triangulaire et

$$det(B) = (a+(n-1)b)\,(a-b)^{n-1}.$$

Résolution pratique de systèmes linéaires

Soit $\mathbf{K}$ l'un des corps $\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{Q}$.

Pour deux entiers naturels m et n avec $m \leq n$ et $A \in M_{m,n}(\mathbf{K})$, on considère le système linéaire (S)

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

de m équations à n inconnues de matrice A.

Si l'on suppose rang $(A) = r \leq \min(m, n)$, on peut toujours à l'aide de transformations élémentaires sur les lignes et d'une permutation éventuelle des inconnues $x_1, \ldots, x_n$, mettre ce système sous la forme *échelonnée en lignes* suivante:

$$\begin{array}{rcl}
a'_{11}x'_1 + \cdots + a'_{1r}x'_r + a'_{1r+1}x'_{r+1} + \cdots + a'_{1n}x'_n & = & b'_1 \\
\ddots \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots & & \vdots \\
a'_{rr}x'_r + a'_{rr+1}x'_{r+1} + \cdots + a'_{rn}x'_n & = & b'_r \\
0 & = & b'_{r+1} \\
\vdots & & \vdots \\
0 & = & b'_m
\end{array}$$

où $(x'_1, \ldots, x'_n)$ est une permutation de $(x_1, \ldots, x_n)$, et $a'_{11} \neq 0, \ldots, a'_{rr} \neq 0$.

Si l'un des $b'_{r+1}, \ldots, b'_m$ est non nul, (S) n'admet pas de solution.

Si $b'_j = 0$ pour tout $j \geq r+1$, les r premières équations donnent $x'_1, \ldots, x'_r$ comme fonctions des $n-r$ variables $x'_{r+1}, \ldots, x'_n$ considérées comme paramètres. Lorsque $r < n$ il y a une infinité de solutions; le nombre $n-r$ de paramètres est la dimension de $Ker(A)$.

Lorsque $r = n$ (auquel cas $n = m$), A est inversible et il y a une unique solution.