Université Lyon 1
Classes préparatoires 2015-2016
Algèbre linéaire
Serge Parmentier

Chapitres 5. Les matrices.

1. L'ensemble des matrices.

Soit $\mathbf{K}$ un corps et $n, m \in N \setminus \{0\}$.

Définition et notations: on appelle matrice m par n à coefficients dans $\mathbf{K}$ tout tableau

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

constitué de m lignes (ou rangées) et de n colonnes d'éléments $a_{ij} \in \mathbf{K}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

Lorsque le nombre de lignes de A est égal au nombre de ses colonnes, i.e. lorsque $n = m$, on dit que A est une matrice *carrée* de taille n.

L'ensemble des matrices m par n à coefficients dans $\mathbf{K}$ est noté $M_{m,n}(\mathbf{K})$; lorsque $m = n$, cet ensemble est noté $M_n(\mathbf{K})$ (au lieu de $M_{n,n}(\mathbf{K})$).

La $i-$ème ligne de A est

$$L_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$$

et la $j-$ème colonne de A est

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

On écrit $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbf{K})$ et on dit que a_{ij} est *le coefficient ou la composante ij de A.*

Deux matrices $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbf{K})$ sont égales ssi pour tout couple (i, j), $a_{ij} = b_{ij}$.

Exemples de matrices et matrices particulières

1. $M_1(\mathbf{K}) = \mathbf{K}$.

2. Les éléments de $M_{2,3}(\mathbf{K})$ sont les tableaux

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbf{K}.$$

3. La matrice nulle $O \in M_{m,n}(\mathbf{K})$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls: $O = (o_{ij})$ avec pour tout (i, j), $o_{ij} = 0$.

4. On dit qu'une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{K})$ est diagonale si $a_{ij} = 0$ pour tout (i, j) tel que $i \neq j$.

Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ est diagonale et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ ne l'est pas.

5. La matrice unité $1_n \in M_n(\mathbf{K})$ est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux valent 1:

$$1_1 = 1, \quad 1_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 1_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots$$

Pour $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$ on définit le *symbole de Kronecker* δ_{ij} par $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$.
On a $1_n = (\delta_{ij}) \in M_n(\mathbf{K})$.

2. Somme de matrices et multiplication par un scalaire

On introduit deux lois naturelles:

La somme

$$\begin{aligned} &M_{m,n}(\mathbf{K}) \times M_{m,n}(\mathbf{K}) \to M_{m,n}(\mathbf{K}) \\ &(A = (a_{ij}), B = (b_{ij})) \mapsto A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \end{aligned}$$

et la multiplication scalaire

$$\begin{aligned} &\mathbf{K} \times M_{m,n}(\mathbf{K}) \to M_{m,n}(\mathbf{K}) \\ &(\lambda, A = (a_{ij})) \quad \mapsto \quad \lambda A = (\lambda a_{ij}) \end{aligned}$$

Proposition: Muni de ces deux lois, l'ensemble $M_{m,n}(\mathbf{K})$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ de neutre la matrice nulle O.

preuve: il s'agit d'observer que les lois étant définies composantes par composantes, les propriétés de $\mathbf{K}$ sont conservées, i.e. que l'on a bien pour tout $A, B, C \in M_{m,n}(\mathbf{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$,

$$(A + B) + C = A + (B + C), \quad A + O = O + A, \quad -A + A = O, \quad A + B = B + A,$$

où $-A = (-a_{ij})$,

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B, \quad (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A, \quad (\lambda\mu)A = \lambda(\mu A), \quad 1_n A = A.$$

Base de $M_{m,n}(\mathbf{K})$ comme espace vectoriel sur $\mathbf{K}$

Pour $k \in \{1,\ldots m\}, l \in \{1,\ldots n\}$ on définit la matrice $E_{kl} \in M_{m,n}(\mathbf{K})$ en déclarant que E_{kl} est la matrice dont toutes les composantes sont nulles sauf la composante kl qui vaut 1.

Exemples: dans $M_{2,1}(\mathbf{K})$,

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dans $M_2(\mathbf{K})$,

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition: la famille de matrices $(E_{kl})_{k\in\{1,\ldots,m\},\, l\in\{1,\ldots,n\}}$ constitue une base du $\mathbf{K}$- espace $M_{m,n}(\mathbf{K})$. On a $dim_{\mathbf{K}}(M_{m,n}(\mathbf{K})) = mn$.

Exemple: Toute matrice $A = (a_{ij}) \in M_2(\mathbf{K})$ s'écrit dans cette base comme suit:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

preuve: Cette famille est génératrice car tout $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbf{K})$ s'écrit

$$A = \sum_{1 \leq k \leq m, 1 \leq l \leq n} a_{kl} E_{kl}.$$

Elle est libre car la condition de combinaison linéaire nulle:

$$\sum_{1 \leq k \leq m, 1 \leq l \leq n} \lambda_{kl} E_{kl} = O$$

équivaut à demander que la matrice $\Lambda = (\lambda_{ij})$ soit la matrice nulle, i.e. à demander que $\lambda_{ij} = 0$ pour tout (i, j).

3. Multiplication matricielle.

Soient $m, n, p \in N \setminus \{0\}$. On définit le produit des matrices $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbf{K})$ et $B = (b_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbf{K})$ en posant

$$A\,B := (\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}) \in M_{m,p}(\mathbf{K}),$$

i.e. le produit AB est la matrice m par p dont la composante ij vaut

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj}.$$

Exemples:

1. Prenons $A = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \in M_{1,2}(\mathbf{K})$ et $B = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbf{K})$. On a

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = ac + bd \in M_1(\mathbf{K}) = \mathbf{K}$$

et

$$BA = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca & cb \\ da & db \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{K}).$$

2. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbf{R})$. On a

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+4b & 2a+5b & 3a+6b \\ c+4d & 2c+5d & 3c+6d \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbf{K}).$$

Par contre, BA n'est pas défini.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{Q})$.

On a

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Observer que $AB \neq BA$, i.e. la multiplication matricielle n'est *pas* commutative.
4. Soit $1_n \in M_n(\mathbf{K})$ la matrice unité. Pour tout $A \in M_n(\mathbf{K})$ on a $A1_n = 1_nA = A$.

Propriétés: Pour tout $A, A' \in M_{m,n}(\mathbf{K}), B, B' \in M_{n,p}(\mathbf{K}), C \in M_{p,q}(\mathbf{K})$ et $\lambda, \lambda' \in \mathbf{K}$ on a

$$(AB)C = A(BC), \quad (\lambda A + \lambda' A')B = \lambda(AB) + \lambda'(A'B), \quad A(\lambda B + \lambda' B') = \lambda(AB) + \lambda'(AB').$$

preuve: on a $AB = (\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj})$ et $BC = (\sum_{l=1}^p b_{il}c_{lj})$. D'où

$$(AB)C = (\sum_{l=1}^p (\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kl})c_{lj}) = (\sum_{k=1}^n a_{ik}(\sum_{l=1}^p b_{kl}c_{lj})) = A(BC).$$

Je vous laisse vérifier les égalités de distributivité.

Observer que le produit de deux matrices carrées $A, B \in M_n(\mathbf{K})$ est toujours défini et est une matrice carrée $AB \in M_n(\mathbf{K})$.
On a donc deux lois de composition interne sur $M_n(\mathbf{K})$:
- l'addition matricielle $+ : M_n(\mathbf{K})^2 \to M_n(\mathbf{K}) : ((a_{ij}), (b_{ij})) \mapsto (a_{ij} + b_{ij})$
- le produit matriciel $\times : M_n(\mathbf{K})^2 \to M_n(\mathbf{K}) : ((a_{ij}), (b_{ij})) \mapsto (\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj})$

Proposition $M_n(\mathbf{K})$ muni des lois $+$ et $\times$ est un anneau unitaire, d'unité la matrice identité 1_n. Pour $n \geq 2$ cet anneau n'est pas commutatif.

preuve: on sait déjà que l'addition $+$ est associative, de neutre la matrice nulle, à opposés (l'opposé de $A = (a_{ij})$ est $-A = (-a_{ij})$) et commutative.
L'associativité $(AB)C = A(BC)$, l'unité $A1_n = 1_nA = A$, la distributivité $A(B + B') = AB + AB', (A+A')B = AB+A'B$ et le fait que le produit n'est pas commutatif ont été vus en propriétés et/ou en exemples plus haut.

Matrice inversible: on dit qu'une matrice carrée $A \in M_n(\mathbf{K})$ est inversible s'il existe $B \in M_n(\mathbf{K})$ telle que $AB = BA = 1_n$.
Observer que si une telle matrice B existe, elle est unique: en effet, si B' est telle que $AB' = 1_n$, alors $BAB' = B$ et donc $B' = B$ (car $BA = 1_n$).
Lorsque A est inversible, l'unique B pour laquelle $AB = BA = 1_n$ est notée A^{-1} et est appelée la *matrice inverse* de A. L'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbf{K})$ est noté $Gl_n(\mathbf{K})$.

Exemples et contre-exemples

1. La matrice unité 1_n est inversible, d'inverse 1_n; la matrice nulle $O \in M_n(\mathbf{K})$ n'est pas inversible car pour toute matrice $B \in M_n(\mathbf{K})$ on a $OB = O \neq 1_n$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ est inversible: si $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est telle que $AB = BA = 1_2$, on a

$$AB = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

i.e.

$$a+c=1, \quad b+d=0, \quad c=0, \quad d=1$$

i.e.

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour laquelle on a aussi $BA=1_2$. Conclusion $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{K})$ n'est pas inversible: si $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est telle que $AB=BA=1_2$, on a

$$AB=\begin{pmatrix} c & d \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui conduit à $d=0=1$!

4. Une matrice $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{K})$ est inversible ssi $\delta=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\neq 0$ auquel cas

$$A^{-1}=\frac{1}{\delta}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Propriétés:
(i) 1_n est inversible.
(ii) si $A, A' \in M_n(\mathbf{K})$ sont inversibles alors AA' l'est aussi.
(iii) L'inverse A^{-1} d'une matrice $A \in M_n(\mathbf{K})$ est inversible.

preuve: (i) on a $1_n 1_n = 1_n$. (Cf exemple 1.)

(ii) on a $(AA')(A'^{-1}A^{-1}) = A(A'A'^{-1})A^{-1} = A1_nA^{-1} = AA^{-1} = 1_n$ et $(A'^{-1}A^{-1})(AA') = 1_n$.
Conclusion: l'inverse de AA' est $A'^{-1}A^{-1}$.

(iii) on a $A^{-1}A = AA^{-1} = 1_n$, i.e. $(A^{-1})^{-1} = A$.

4. Matrices et espaces vectoriels

Soit E un $\mathbf{K}$- espace de dimension n de base $\mathbf{e}=(e_j)_{1\leq j\leq n}$, F un $\mathbf{K}$- espace de dimension m de base $\mathbf{f}=(f_i)_{1\leq i\leq m}$.

On sait que tout élément $u \in E$ s'écrit d'une et une seule manière comme combinaison linéaire $u=\sum_{j=1}^n x_j e_j$ des éléments de la base $(e_j)_{1\leq j\leq n}$; se donner u équivaut donc à se donner la liste de ses composantes $(x_1,\ldots,x_n)\in \mathbf{K}^n$ dans la base $(e_j)_{1\leq j\leq n}$. C'est ce qu'exprime, sous forme matricielle, la proposition qui suit:

Proposition: l'application

$$Mat_{\mathbf{e}} : E \to M_{n,1}(\mathbf{K})$$
$$u=\sum_{j=1}^n x_j e_j \mapsto Mat_{\mathbf{e}}(u)=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

preuve: mq cette application est linéaire: pour $u = \sum_j x_j e_j$ et $u' = \sum_j x'_j e_j$, on a

$$Mat_{\mathbf{e}}(u+u') = \begin{pmatrix} x_1 + x'_1 \\ \vdots \\ x_n + x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = Mat_{\mathbf{e}}(u) + Mat_{\mathbf{e}}(u').$$

De même, pour $\lambda \in \mathbf{K}$ et $u \in E$, on a

$$Mat_{\mathbf{e}}(\lambda u) = \lambda Mat_{\mathbf{e}}(u).$$

Pour montrer que cette application est bijective, il suffit d'observer que l'application

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$$

est la réciproque de $Mat_{\mathbf{e}}$.

Remarque: Lorsque $E = K^n$ cet isomorphisme est simplement $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Définition:
1. La matrice $Mat_{\mathbf{e}}(u) \in M_{n,1}(\mathbf{K})$ est appelée *la matrice de* $u \in E$ dans la base $\mathbf{e}$.

2. Soit $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_p)$ une famille de vecteurs de E. La matrice

$$Mat_{\mathbf{e}}(v_1, \ldots, v_p) \in M_{n,p}(\mathbf{K})$$

dont la $j-$ième colonne C_j est la matrice de v_j dans la base $\mathbf{e}$ (i.e. $C_j = Mat_{\mathbf{e}}(v_j)$) est appelée *la matrice de la famille* $\mathbf{v}$ dans la base $\mathbf{e}$.

Soit maintenant $\phi : E \to F$ une application linéaire. On a vu au chapitre 4 que ϕ est déterminée par l'image $(\phi(e_j))_{1 \leq j \leq n}$ de la base $(e_j)_{1 \leq j \leq n}$ de E. Et l'on vient de voir que pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, se donner le vecteur $\phi(e_j)$ équivaut à se donner la matrice $Mat_{\mathbf{f}}(\phi(e_j)$ de ses composantes dans la base $\mathbf{f} = (f_i)_{1 \leq i \leq m}$ de F. Dès lors se donner ϕ équivaut à se donner la matrice de la famille $(\phi(e_j))_{1 \leq j \leq m}$ dans $\mathbf{f}$. On est donc naturellement amené à poser la

Définition: soit $\phi : E \to F$ une application linéaire. La matrice

$$Mat_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(\phi) := Mat_{\mathbf{f}}(\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n)) \in M_{m,n}(\mathbf{K})$$

est appelée *la matrice de ϕ rapportée aux bases* $\mathbf{e}$ *et* $\mathbf{f}$.

Voici comment obtenir cette matrice: pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, écrire $\phi(e_j) \in F$ dans la base $\mathbf{f}$ de F:

$$\phi(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i = a_{1j} f_1 + a_{2j} f_2 + \ldots + a_{mj} f_m.$$

On a alors

$$Mat_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(\phi) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

i.e. $Mat_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(\phi)$ est la matrice m par n dont la $j-$ème colonne C_j est constituée des composantes de $\phi(e_j)$ dans la base $\mathbf{f}$ de F:

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Calcul de $\mathbf{Mat_f}(\phi(\mathbf{u}))$ en fonction de $Mat_{\mathbf{e}}(u)$ et de $Mat_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(\phi)$:
Soit $u = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \in E$ et écrivons comme plus haut $\phi(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i$.
On a

$$\phi(u) = \sum_{j=1}^{n} x_j \phi(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j (\sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i) = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) f_i.$$

La matrice des composantes de $\phi(u)$ dans la base $\mathbf{f}$ est donc

$$\begin{aligned} Mat_{\mathbf{f}}(\phi(u)) &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= Mat_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(\phi)\, Mat_{\mathbf{e}}(u) \end{aligned}$$

On rappelle que l'ensemble $L(E, F)$ des applications linéaires $\phi : E \to F$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ pour les opérations $(\phi +_L \psi)(u) = \phi(u) + \psi(u)$ et $(\lambda \cdot_L \psi)(u) = \lambda(\psi(u))$.

Proposition L'application de $L(E, F)$ vers $M_{m,n}(\mathbf{K})$ qui à l'application linéaire ϕ associe la matrice $Mat_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(\phi)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

esquisse de preuve: pour vérifier la linéarité, il s'agit de mq

$$\begin{aligned} Mat_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(\phi +_L \psi) &= Mat_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(\phi) + Mat_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(\psi) \\ Mat_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(\lambda \cdot_L \phi) &= \lambda\, Mat_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(\phi) \end{aligned}$$

Pour mq c'est une bijection, on définit l'application réciproque:

Soit $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbf{K})$; on sait déjà qu'il existe une unique application linéaire $\phi_A : E \to F$ telle que, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\phi_A(e_j) = a_{1j} f_1 + a_{2j} f_2 + \ldots + a_{mj} f_m$$

(Cf Chapitre 4: *une application linéaire est déterminée par l'image d'une base*).
L'application
$$M_{m,n}(\mathbf{K}) \to L(E,F) : A \mapsto \phi_A$$
est la réciproque de l'application $L(E,F) \to M_{m,n}(\mathbf{K}) : \phi \mapsto Mat_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(\phi)$.

Composition et produit matriciel

Soient trois **K**- espaces E, F, G de dimensions respectives n, m et p et de bases respectives $\mathbf{e} = (e_j)_{1\le j\le n}$, $\mathbf{f} = (f_i)_{1\le i\le m}$ et $\mathbf{g} = (g_k)_{1\le k\le p}$.

On sait déjà que si $\phi : E \to F$ et $\psi : F \to G$ sont des applications linéaires, alors l'application composée $\psi \circ \phi : E \to G$ est linéaire.

Voici le *lien fondamental* entre la composition d'applications et le produit matriciel:

Proposition: On a
$$Mat_{\mathbf{e},\mathbf{g}}(\psi \circ \phi) = Mat_{\mathbf{f},\mathbf{g}}(\psi)\, Mat_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(\phi).$$

preuve: Ecrivons
$$Mat_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(\phi) = A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbf{K}), \quad Mat_{\mathbf{f},\mathbf{g}}(\psi) = B = (b_{ij}) \in M_{p,m}(\mathbf{K})$$
$$Mat_{\mathbf{e},\mathbf{g}}(\psi \circ \phi) = C = (c_{ij}) \in M_{p,n}(\mathbf{K}).$$

Il s'agit de montrer que $C = BA$, i.e. pour tout $(i,j) \in \{1,\ldots,p\} \times \{1,\ldots,n\}$,
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik} a_{kj}.$$

Voici le calcul:
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p} c_{ij} g_i &= (\psi \circ \phi)(e_j) \\
&= \psi(\phi(e_j)) \\
&= \psi(\sum_{k=1}^{m} a_{kj} f_k) \\
&= \sum_{k=1}^{m} a_{kj} \psi(f_k) \\
&= \sum_{k=1}^{m} a_{kj}\, (\sum_{i=1}^{p} b_{ik} g_i) \\
&= \sum_{i=1}^{p} (\sum_{k=1}^{m} b_{ik} a_{kj}) g_i.
\end{aligned}$$

La famille $(g_i)_{1\le i\le p}$ étant une base de G, on a pour tout (i,j), $c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik} a_{kj}$.

Lorsque $E = F = G$, l'isomorphisme entre $L(E,F)$ et $M_{m,n}(\mathbf{K})$ et le lien entre composition et produit matriciel nous permettent d'identifier les anneaux $L(E)$ et $M_n(\mathbf{K})$:

Proposition: soit E un **K**- espace de base $\mathbf{e} = (e_j)_{1\le j\le n}$. L'application

$$L(E) \to M_n(K) : \phi \mapsto Mat_{\mathbf{e},\mathbf{e}}(\phi)$$

est un isomorphisme d'anneaux qui envoie l'application identité id_E sur la matrice unité 1_n.
preuve: on sait déjà que c'est une bijection compatible avec la somme:

$$Mat_{\mathbf{e},\mathbf{e}}(\phi +_L \psi) = Mat_{\mathbf{e},\mathbf{e}}(\phi) + Mat_{\mathbf{e},\mathbf{e}}(\psi).$$

La proposition qui précède nous dit que c'est aussi compatible avec la composition:

$$Mat_{\mathbf{e},\mathbf{e}}(\psi \circ \phi) = Mat_{\mathbf{e},\mathbf{e}}(\psi)\, Mat_{\mathbf{e},\mathbf{e}}(\phi).$$

Enfin, $Mat_{\mathbf{e},\mathbf{e}}(id_E) = 1_n$ car pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $id_E(e_j) = e_j$.