Université Lyon 1
Classes préparatoires 2015-2016
Algèbre linéaire
Serge Parmentier

Chapitre 3: Espaces vectoriels

On désigne par $\mathbf{K}$ un corps, d'addition $+_K$, de multiplication $\cdot_K$, d'unité 1_K.

1. Espaces et sous-espaces

Définition: Un *espace vectoriel* sur $\mathbf{K}$ est un ensemble non vide E muni d'une loi d'addition

$$+ : E^2 \to E : (u, v) \mapsto u + v$$

et d'une loi externe

$$\mathbf{K} \times E \to E : (\lambda, u) \mapsto \lambda u$$

qui satisfont aux propriétés suivantes:
(1) l'addition $+$ est
associative: quels que soient $u, v, w \in E$, $(u + v) + w = u + (v + w)$.
commutative: quels que soient $u, v \in E$, $u + v = v + u$.
à neutre: il existe un élément noté $\vec{0}$ de E, tel que pour tout $u \in E$, $\vec{0} + u = u$.
à réciproques ou opposés : quel que soit $u \in E$, il existe un élément noté $-u \in E$ tel que $-u+u = \overrightarrow{0}$.
(2) les lois sur $\mathbf{K}$ et E sont compatibles:
quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ et $u, v \in E$,
$\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
$(\lambda +_K \mu)u = \lambda u + \mu u$
$(\lambda \cdot_K \mu)u = \lambda(\mu\, u)$
$1_K u = u$.

Les éléments de E sont (souvent) appelés des *vecteurs* et les éléments de $\mathbf{K}$ sont appelés des *scalaires.* Dans la suite, on écrira '*E est un $\mathbf{K}-$ espace*', pour signifier 'E est un espace vectoriel sur le corps $\mathbf{K}$.'

Cette notion est *fondamentale* et les exemples abondent.

1.*L'exemple par excellence*
Pour $n \in N \setminus \{0\}$, $E = \mathbf{K}^n$ muni de l'addition

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

et de la multiplication par le scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

est un $\mathbf{K}-$ espace. Le neutre pour $+$ est $\vec{0} = (0, \ldots, 0)$ et l'opposé du $n-$ uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n$ est $(-x_1, \ldots, -x_n)$.

Cas particuliers:
Pour $n = 1$, $\mathbf{K}$ est un $\mathbf{K}-$ espace. (C'est une autre manière de voir les propriétés de corps.)
Pour $n = 2$ et $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, c'est le plan du lycée et l'addition est la *règle du parallélogramme.*

2. *Corps emboités*
Soient $\mathbf{K}$ et $\mathbf{L}$ deux corps tels que $\mathbf{K} \subset \mathbf{L}$ (penser à $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$), alors $\mathbf{L}$ est un $\mathbf{K}-$ espace, pour la loi d'addition $+_L$ et la multiplication $\mathbf{K} \times \mathbf{L} \to \mathbf{L} : (\lambda, u) \mapsto \lambda \cdot_L u$

3. *Les polynômes en une indéterminée*
L'ensemble $\mathbf{K}[X]$ des polynômes est un $\mathbf{K}$ - espace pour l'addition (cf chapitre 1)

$$\sum_{i \in N} a_i X^i + \sum_{i \in N} b_i X^i = \sum_{i \in N} (a_i + b_i) X^i$$

et la multiplication par le scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$

$$\lambda(\sum_{i \in N} a_i X^i) = \sum_{i \in N} \lambda a_i \, X^i.$$

Le neutre est le polynôme nul et l'opposé de P est le polynôme $-P$.

4.*Les suites de réels*
Soit $\mathbf{R}^N$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n \in N}$ de nombres réels. $\mathbf{R}^N$ est un $\mathbf{R}-$ espace pour les lois

$$(x_n)_{n \in N} + (y_n)_{n \in N} = (x_n + y_n)_{n \in N}, \quad \lambda (x_n)_{n \in N} = (\lambda x_n)_{n \in N}.$$

Le neutre pour $+$ est la suite constante nulle et l'opposé de la suite $(x_n)_{n \in N}$ est la suite $(-x_n)_{n \in N}$.

5. *Les fractions rationnelles*
De manière analogue à $\mathbf{K}[X]$, l'ensemble $\mathbf{K}(X)$ est un $\mathbf{K}-$ espace.

Un exemple de calcul: dans tout $\mathbf{K}-$ espace E, on a $\lambda u = 0$ ssi $\lambda = 0$ ou $u = \vec{0}$.

Dans un sens: si $\lambda = 0, \lambda u = 0u = (0+0)u = 0u + 0u$ donc $0u = \vec{0}$; si $u = \vec{0}$, $\lambda u = \lambda \vec{0} = \lambda(\vec{0} + \vec{0}) = \lambda \vec{0} + \lambda \vec{0}$ donc $\lambda \vec{0} = \vec{0}$.

Réciproquement: supposons $\lambda u = \vec{0}$. Si $\lambda = 0$ c'est fini; sinon λ est inversible dans $\mathbf{K}$ et on a $\vec{0} = \lambda^{-1} \vec{0} = \lambda^{-1}(\lambda u) = 1_K u = u$.

Soit E est un $\mathbf{K}-$ espace.

Définition (sous-espace)
Une partie non vide $F \subset E$ est appelée un *sous-espace vectoriel* de E si
$\forall u, v \in F, \forall \lambda \in K$, $u + v \in F$ et $\lambda u \in F$.

Remarque: Par le calcul qui précède, pour $u \in F$, $0u = \vec{0} \in F$, i.e. *tout sous-espace $F \subset E$ contient* $\vec{0}$.

Tout sous-espace vectoriel $F \subset E$ est un $\mathbf{K}$- espace pour les lois héritées de E.

Pour la suite on écrira (souvent) *sous-espace* pour signifier *sous-espace vectoriel.*

Exemples

1. Soient $a, b, c \in \mathbf{R}$, $(a, b) \neq (0, 0)$. On rappelle que la partie $D \subset R^2$ des points (x, y) satisfaisant à l'équation $ax + by = c$ est appelée une *droite affine du plan.* Une telle droite D est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$ ssi $c = 0$.

2. Soient $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. La partie $\Pi \subset R^3$ des points (x, y, z) satisfaisant à l'équation $ax + by + cz = d$ est appelée un *plan affine de l'espace.* Un tel plan Π est un sous-espace vectoriel de R^3 ssi $d = 0$.

3. Les deux exemples précédents sont des cas particuliers de la situation générale suivante:

Soient deux familles de réels $a_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ et $d_1, \ldots, d_m \in \mathbf{R}$. L'ensemble $\mathcal{E}$ des solutions $(x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ du système de m équations à n inconnues

$$\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + \ldots + & a_{1n}x_n = & d_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + & a_{mn}x_n = & d_m \end{array}$$

est soit vide, soit un sous-espace affine de R^n. $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de R^n ssi pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, $d_i = 0$.

4. Dans l'ensemble R^N des suites de nombres réels, la partie constituée des suites convergentes est un sous-espace vectoriel.

En effet: si $lim_{n\to\infty} x_n = l$ et $lim_{n\to\infty} y_n = l'$, alors $lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = l + l'$ et pour tout réel λ, $lim_{n\to\infty} \lambda x_n = \lambda l$.

5. Soient $a, b \in \mathbf{R}$. Dans l'ensemble des suites de nombres réels, la partie constituée des suites $(u_n)_{n\in N}$ satisfaisant à la récurrence $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, $n \in N$ est un sous-espace vectoriel.

En effet, si les suites (u_n) et (v_n) sont solutions, alors $(u_n + v_n)$ et $(\lambda u_n), \lambda \in \mathbf{R}$, le sont aussi.

Proposition (Intersection): Soient $F, G \subset E$ deux sous-espaces du $\mathbf{K}-$ espace E.

Alors, $F \cap G$ est un sous-espace de E.

Exercice: sous les hypothèses de la proposition, mq $F \cup G$ est sous espace ssi $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Définition/Proposition (Somme)

(i) Soit E un $\mathbf{K}-$ espace et $F, G \subset E$ deux sous-espaces. L'ensemble

$$F + G := \{u + v, u \in F, v \in G\}$$

est un sous-espace de E. $F + G$ est appelé la *somme* de F et G.

On dit que F et G sont en somme directe dans E si $F \cap G = \{\vec{0}\}$. On écrit alors $F \oplus G$ au lieu de $F + G$. (Le + est encerclé pour signifier l'intersection nulle.)

(ii) On dit que E est somme de F et G si $E = F + G$.

Si $F \cap G = \{\vec{0}\}$ et $E = F + G$ on dit que F et G sont *supplémentaires* dans E.

Exemples: Dans R^3,

- les droites $D_x = \{(\lambda, 0, 0), \lambda \in \mathbf{R}\}$ et $D_y = \{(0, \mu, 0), \mu \in \mathbf{R}\}$ sont en somme directe.
- le plan $\Pi = \{(\lambda, \mu, 0), \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}$ et la droite $D = \{(\lambda, \lambda, 0), \lambda \in \mathbf{R}\}$ ne sont pas en somme directe: en effet, $\Pi \cap D = D \neq \{\vec{0}\}$.
- le plan Π et la droite $D_z = \{(0, 0, \lambda), \lambda \in \mathbf{R}\}$ sont en somme directe. De plus, $R^3 = \Pi \oplus D_z$.

2. Famille d'éléments d'un ensemble

Soit I un ensemble fini, A un ensemble.

Définition: On appelle famille finie de A indicée par I toute application

$$I \to A : i \mapsto v_i$$

On écrit une telle famille $\mathbf{v} = (v_i)_{i\in I}$. Si $I = \{1, \ldots, p\}$, une famille indicée par I est donc une $p-$liste (ou un $p-$uplets) $(v_1, \ldots, v_p) \in A^p$.

On appelle cardinal de $\mathbf{v}$, le cardinal de I. On note ce cardinal $\mid \mathbf{v} \mid$.

Définition: Soient $\mathbf{u} = (u_i)_{i\in I}$ et $\mathbf{v} = (v_j)_{j\in J}$ deux familles finies de A. On dit que $\mathbf{u}$ est une sur-famille de $\mathbf{v}$ ou que $\mathbf{v}$ est une sous-famille de $\mathbf{u}$ s'il existe une injection

$$\phi : J \to I$$

telle que $v_j = u_{\phi(j)}$ pour tout $j \in J$.
On notera cela (par abus) $\mathbf{v} \subset \mathbf{u}$.
Exemple: (u_2, u_1) est une sous-famille de (u_1, u_2, u_3), ici $J = \{1, 2\}$, $I = \{1, 2, 3\}$ et $\phi(1) = 2, \phi(2) = 1$.

3. Combinaisons linéaires, familles génératrices, familles libres

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ et $\mathbf{v} = (v_i)_{i\in I}$ une famille finie de E.
Définition: on appelle *combinaison linéaire* de $\mathbf{v}$ toute somme

$$\sum_{i\in I} \lambda_i v_i$$

avec $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille finie d'éléments de $\mathbf{K}$.
Attention: Une combinaison linéaire est une somme *finie*.
Si $I = \{1, 2, \ldots, p\}$ une telle combinaison linéaire s'écrit

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_p v_p.$$

Exemples:
1. $E = R^3$ $\mathbf{v} = (v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0))$. Une combinaison linéaire est une expression de la forme
$$\lambda(1, 0, 0) + \mu(0, 1, 0) = (\lambda, \mu, 0), \quad \lambda, \mu \in R.$$
2. $E = \mathbf{C}[X]$, $\mathbf{v} = (v_1 = 1, v_2 = X)$. Une combinaison linéaire est un polynôme de degré au plus 1: $z_0 + z_1 X \in \mathbf{C}[X]$.
3. $E = K_{\leq n}[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n. Tout polynôme $P \in E$ est combinaison linéaire de la famille $(X^j)_{0\leq j\leq n}$.

Proposition (Sous-espace engendré). Soit $\mathbf{v} = (v_i)_{i\in I}$ une famille finie d'éléments de E.
(1) L'ensemble $Vect((v_i)_{i\in I}) := \{\sum_{i\in I} \lambda_i v_i,\ (\lambda_i)_{i\in I}$ famille finie de $\mathbf{K}\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
(2) Si $F \subset E$ est un sous-espace de E tel que pour tout $i \in I, v_i \in F$, alors $Vect((v_i)_{i\in I}) \subset F$.
En d'autres termes: pour l'inclusion ensembliste, $Vect((v_i)_{i\in I})$ est le plus petit sous-espace de E contenant $v_i, i \in I$. On dit que $Vect((v_i)_{i\in I})$ est le sous-espace de E engendré par $\mathbf{v}$.

preuve: cf cours.

Exemples:
1. $Vect((1, 0, 0), (0, 1, 0)) \subset R^3$ est le plan de coordonnées $\Pi_z = \{(x, y, z) \in R^3,\ z = 0\}$.
2. $Vect(1, X)$ est l'ensemble des polynômes de degré au plus 1.
3. $Vect(1, X, X^2, \ldots, X^n) = \mathbf{K}_{\leq n}[X]$ est le sous-espace de $\mathbf{K}[X]$ des polynômes de degré au plus n.
4. $Vect((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)) = R^3$ car tout $(a, b, c) \in R^3$ s'écrit $(a, b, c) = a(1, 0, 0)+b(0, 1, 0)+c(0, 0, 1)$.

Définition
(i) Famille génératrice:
On dit que la famille finie $(v_i)_{i\in I}$ est une famille *génératrice* de E si

$$Vec(v_i)_{i\in I} = E$$

i.e. si tout élément de E est combinaison linéaire des éléments de $(v_i)_{i\in I}$.
(ii) Espace de dimension finie:
On dit que E est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{K}$ s'il admet une famille génératrice finie.

Proposition: $(v_i)_{i\in I}$ est génératrice de E ssi l'application

$$K^p \to E : (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \mapsto \sum_{1\le i\le p} \lambda_i v_i$$

est surjective.

Exemples:
1.$((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est une famille génératrice de R^3
2. Plus généralement: $((1_K, 0_K, \dots, 0_K), \dots, (0_K, \dots, 0_K, 1_K))$ est une famille génératrice de K^n de cardinal n pour tout corps K.

Cette famille sera appelée plus loin *la base canonique* de K^n.

3. Dans $\mathbf{K}^n$, la famille $(v_1 = (a_{11}, \dots, a_{n1}), \dots, v_p = (a_{1p}, \dots, a_{np}))$ de cardinal p est géné - ratrice ssi pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{K}^n$ l'équation

$$\sum_{1\le j\le p} \lambda_j (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}) = (a_1, \dots, a_n)$$

admet au moins une solution $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbf{K}^p$, i.e. ssi le système

$$\begin{aligned} a_{11}\lambda_1 + \ldots + a_{1p}\lambda_p &= a_1 \\ &\vdots \\ a_{n1}\lambda_1 + \ldots + a_{np}\lambda_p &= a_n \end{aligned}$$

admet au moins une solution $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$.

Proposition: Toute sur-famille $\mathbf{u}$ d'une famille génératrice $\mathbf{v}$ est encore génératrice.

Preuve: soit $\phi : J \to I$ telle que $v_j = u_{\phi(j)}$. par hypothèse, tout $v \in E$ est combinaison linéaire des éléments de $\mathbf{v}$:

$$v = \sum_{j\in J} \lambda_j v_j = \sum_{j\in J} \lambda_j u_{\phi(j)}.$$

C'est donc aussi une combinaison linéaire des $u_i, i \in I$.

Définition (Famille libre)

On dit qu'une famille finie $(v_i)_{i\in I}$ est libre si elle satisfait à la condition suivante:

Pour toute famille finie $(\lambda_i)_{i\in I}$ d'éléments de K, l'égalité

$$\sum_{i\in I} \lambda_i v_i = \vec{0}$$

implique $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in I$.

Proposition Soit $I = \{1, \ldots, p\}$. La famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est libre ssi l'application

$$K^p \to E : (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \mapsto \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_p v_p$$

est injective.

Preuve: supposons cette application injective. On sait que $(0, \ldots, \ldots, 0) \mapsto \overrightarrow{0} \in E$. Par injectivité, aucun $p-$ uplet non nul $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ ne peut être envoyé sur $\overrightarrow{0}$, i.e. si $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_p v_p = 0$ alors $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in I$. La famille $(v_i)_{i\in I}$ est donc libre.

Réciproquement: supposons $\mathbf{v}$ libre. La condition $\sum_{i\in I} \lambda_i v_i = \sum_{i\in I} \mu_i v_i$ équivaut à

$$(\lambda_1 - \mu_1)v_1 + ... + (\lambda_p - \mu_p)v_p = \overrightarrow{0}$$

et par liberté on doit avoir $\lambda_i = \mu_i$ pour tout $i \in I$.

Dans $\mathbf{K}^n$, la famille

$$(v_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}), \ldots, v_p = (a_{1p}, \ldots, a_{np}))$$

est libre ssi le système

$$\begin{aligned} a_{11}\lambda_1 + \ldots + a_{1p}\lambda_p &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n1}\lambda_1 + \ldots + a_{np}\lambda_p &= 0 \end{aligned}$$

admet pour unique solution $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) = (0, \ldots, 0)$.

Par la proposition, cette famille est libre ssi pour tout $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{K}^n$, le système

$$\begin{aligned} a_{11}\lambda_1 + \ldots + a_{1p}\lambda_p &= a_1 \\ &\vdots \\ a_{n1}\lambda_1 + \ldots + a_{np}\lambda_p &= a_n \end{aligned}$$

admet au plus une solution $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$.

Exemples:
1. Toute famille de cardinal 1 non nulle $(v \neq 0)$ d'un $\mathbf{K}$- espace E est libre.
2. $((1_K, 0), (0, 1_K))$ est libre dans K^2.
3. La famille $((1_K, 0, \ldots, 0), (0, 1_K, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1_K))$ de cardinal n est libre dans K^n.
4. $((1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$ est libre dans R^3.

Proposition: Toute sous-famille $\mathbf{v}$ d'une famille libre $\mathbf{u}$ est libre.

preuve: Soit $\phi : J \to I$ telle que $v_j = u_{\phi(j)}$. Supposons $\vec{0} = \sum_{j\in J} \lambda_j v_j = \sum_{j\in J} \lambda_j u_{\phi(j)}$. C'est une combinaison linéaire d'éléments de $\mathbf{u}$ nulle, donc tous les coefficients λ_j sont nuls.

Définition/terminologie On dit qu'une famille est liée si elle n'est pas libre, i.e. s'il existe une famille finie $(\lambda_i)_{i\in I}$ non nulle telle que $\sum_{i\in I} \lambda_i\, v_i = \vec{0}$.

Proposition: $(v_i)_{i\in I}$ est liée ssi l'un des v_i est combinaison linéaire des autres.

preuve: cf cours

Exemples

1. Si $\mathbf{v}$ contient $\vec{0}$ elle est liée: $1\vec{0} = \vec{0}$.
2. Si deux éléments de $\mathbf{v}$ sont égaux, elle est liée: $v - v = \vec{0}$.
2. Dans $R^2, ((1,0),(1,1),(0,1))$ est liée: $(1,0) - (1,1) + (0,1) = (0,0)$.

4. Bases

Définition: On dit qu'une famille finie $(v_i)_{i\in I}$ est une base de E si elle est génératrice et libre.

Exemples:

1. (1_K) est une base du corps $\mathbf{K}$ vu comme espace vectoriel sur lui-même.
2. Plus généralement, pour $n \in N \setminus \{0\}$, la famille

$$((1_K, 0, \ldots, 0), (0, 1_K, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1_K))$$

de cardinal n est la *base canonique* de K^n.

3. $(X^j)_{0\leq j\leq n}$ est une base de l'espace $\mathbf{K}_{\leq n}[X]$ des polynômes de degré au plus n à coefficients dans $\mathbf{K}$.

Proposition: $(v_i)_{i\in I}$ est une base ssi tout $v \in E$ s'écrit d'une et une seule manière comme combinaison linéaire des v_i.

Preuve: Une telle combinaison linéaire existe car $(v_i)_{i\in I}$ est génératrice. Cette combinaison linéaire est unique car $(v_i)_{i\in I}$ est libre.

La famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est donc une base ssi l'application

$$K^p \to E : (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \mapsto \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_p v_p$$

est bijective.

Terminologie: si $(v_i)_{i\in I}$ est une base de E et $v \in E$ s'écrit $v = \sum_{i\in I} \lambda_i v_i,\ \lambda_i \in K, i \in I$, alors le scalaire λ_i est appelé la $i-$ème composante de v dans la base $(v_i)_{i\in I}$.

Exemples:

1. La liste des coordonnées de (a,b,c) dans la base canonique de R^3 est (a,b,c)
2. La liste des coordonnées de (a,b,c) dans la base $((1,1,1),(0,1,1),(0,0,1))$ de R^3 est donnée par la solution $(\lambda, \lambda', \lambda'')$ du système

$$(a,b,c) = \lambda(1,1,1) + \lambda'(0,1,1) + \lambda''(0,0,1)$$

i.e. par

$$a = \lambda, \quad b = \lambda + \lambda', \quad c = \lambda + \lambda' + \lambda''$$

i.e. par

$$\lambda = a \quad \lambda' = b - a \quad \lambda'' = c - b.$$

3. Soit $a \in \mathbf{K}$. Les composantes du polynôme P de degré au plus n dans la base

$$(1, (X-a), (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n)$$

de $\mathbf{K}_{\leq n}[X]$ sont données par la formule de Taylor

$$P = P(a) + P'(a)(X-a) + \ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n.$$

Le théorème qui suit est *important*. L'argument de preuve est *instructif*.

Théorème de la base incomplète (TBI)

Soit $E \neq \{\vec{0}\}$ un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbf{K}$, $\mathbf{l}$ une famille finie libre et $\mathbf{g}$ une famille finie génératrice de E telles que $\mathbf{l} \subset \mathbf{g}$.

Alors, il existe une base $\mathbf{b}$ de E telle que

$$\mathbf{l} \subset \mathbf{b} \subset \mathbf{g}.$$

preuve: pour rappel, on désigne par $\mid \mathbf{v} \mid$ le cardinal d'une famille finie $\mathbf{v}$.
On considère l'ensemble

$$L := \{\mathbf{e}, \mathbf{e} \text{ est libre et } \mathbf{l} \subset \mathbf{e} \subset \mathbf{g}\}.$$

L est non vide car $\mathbf{l} \in L$. Soit C_L la partie de N suivante: $C_L := \{\mid \mathbf{e} \mid, \mathbf{e} \in L\} \subset N$. C_L est non vide car L est non vide et C_L est majorée par $\mid \mathbf{g} \mid = m$. Elle admet donc un maximum $n \leq m$. Soit alors $\mathbf{b} \in L$ de cardinal n.

On va montrer que $\mathbf{b}$ est une base.

Pour cela on commence par observer que tout élément de $\mathbf{g}$ est combinaison linéaire de $\mathbf{b}$:
Soit g_i un élément de $\mathbf{g}$. Deux possibilités: (1) g_i est élément de $\mathbf{b}$ et (2) g_i ne l'est pas. Dans le premier cas $g_i = 1g_i$ est une combinaison linéaire de $\mathbf{b}$. Dans le second cas, la famille $(b_1, \ldots, b_n, g_i)$ est liée car $\mathbf{b}$ est de cardinal maximal parmi les familles libres; il existe donc des coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et $\mu \in K$ non tous nuls tels que

$$\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu g_i = \vec{0}.$$

Observer que $\mu = 0$ contredit la liberté de $\mathbf{b}$. Donc $\mu \neq 0$ et on a

$$g_i = \frac{-1}{\mu}(\sum_j \lambda_j b_j).$$

Tout élément de $\mathbf{g}$ est donc combinaison linéaire de $\mathbf{b}$, ce que l'on peut réécrire comme suit:
quel que soit $i \in \{1, \ldots, m\}$, il existe des scalaires $\lambda_{i,1}, \ldots, \lambda_{i,n} \in \mathbf{K}$ tels que

$$g_i = \sum_{1 \leq j \leq n} \lambda_{i,j} b_j.$$

Soit alors $v \in E$. Comme $\mathbf{g}$ est génératrice, il existe $\mu_1, \ldots, \mu_m \in \mathbf{K}$ tels que

$$v = \mu_1 g_1 + \ldots + \mu_m g_m = \mu_1(\sum_j \lambda_{1,j} b_j) + \ldots + \mu_m(\sum_j \lambda_{m,j} b_j).$$

C'est donc une combinaison linéaire de $\mathbf{b}$. $\mathbf{b}$ est donc génératrice. Comme $\mathbf{b}$ est aussi libre, c'est une base de E.

Corollaire: soit $E \neq \{\vec{0}\}$ de dimension finie sur $\mathbf{K}$.
(i) De toute famille génératrice finie de E on peut extraire une base.
(ii) Toute famille libre peut être complétée en une base de E.
En particulier, *tout espace vectoriel* $E \neq \{\vec{0}\}$ *de dimension finie admet une base.*

preuve: (i) appliquer le TBI à la famille génératrice $\mathbf{g} = (\mathbf{g_i})_{\mathbf{i} \in \mathbf{I}}$ avec $\mathbf{l} = (g_{i_0})$, pour g_{i_0} un élément non nul de $\mathbf{g}$. (Un tel élément existe car $E \neq \{\vec{0}\}$.)
(ii) soit $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_r)$ libre et $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_m)$ génératrice de E. Etant une sur-famille de $\mathbf{g}$, la famille $\mathbf{g}' = (l_1, \ldots, l_r, g_1, \ldots, g_m)$ est génératrice. Appliquer le TBI à $\mathbf{l} \subset \mathbf{g}'$.
Le (i) assure l'existence d'une base car par hypothèse E admet une famille génératrice finie.

Définition: on convient que l'espace trivial $E = \{\vec{0}\}$ admet pour base la famille vide.

5. Dimension

Proposition (Steinitz):
Soit $E \neq \{\vec{0}\}$ un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$. On suppose $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ libre et $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_m)$ génératrice. Alors $n \leq m$.

La notion de *dimension* qui suit est fondamentale:
Théorème: Soit $E \neq \{\vec{0}\}$ un espace vectoriel qui admet une famille génératrice finie (i.e. de dimension finie). Alors toutes les bases de E ont même cardinal.
Preuve: soit $\mathbf{e}$ et $\mathbf{f}$ deux bases de cardinal m et n. Alors $m \leq n$ et $n \leq m$, par Steinitz.

Définition (Dimension). Soit E un $\mathbf{K}-$ espace admettant une famille génératrice finie. On appelle dimension de E le cardinal de l'une quelconque de ses bases. On note cette dimension $dim_{\mathbf{K}}(E)$.

Remarque: l'espace trivial $E = \{\vec{0}\}$ admettant une base à 0 élément est de dimension 0.

Proposition: soit E un $\mathbf{K}-$ espace de dimension n et $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille de n vecteurs. Alors $\mathbf{e}$ est libre ssi $\mathbf{e}$ est génératrice ssi $\mathbf{e}$ est une base.
Preuve: il suffit de montrer que libre implique génératrice et que génératrice implique libre.
Par le corollaire du TBI, on peut compléter la famille libre $\mathbf{e}$ en une base $\mathbf{b}$ de E mais cette base est de cardinal n donc égale à $\mathbf{e}$.
Par le corollaire du TBI, si $\mathbf{e}$ est génératrice, on peut en extraire une base $\mathbf{b}$ de même cardinal donc égale à $\mathbf{e}$.

Proposition: On suppose E de dimension finie n sur $\mathbf{K}$.
Tout sous-espace $F \subset E$ est un $\mathbf{K}-$ espace de dimension finie et on a $dim\, F \leq dim\, E$.
preuve: si $F = \{\vec{0}\}$ alors F est de dimension finie $= 0$.
Supposons $F \neq \{\vec{0}\}$. Si $v \in F$ est non nul, (v) est libre dans F. L'ensemble L des familles finies libres de F est donc non vide.
Toute famille finie libre de F est aussi une famille finie libre de E. Par Steinitz, le cardinal d'une telle famille est au plus n.
L'ensemble des cardinaux $C_L := \{|\ \mathbf{e}\ |, \mathbf{e} \text{ finie libre de } F\} \subset N$ étant majoré par n admet un maximum $m \leq n$.
Soit alors $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m) \in L$ de cardinal m et $f \in F \setminus \{f_1, \ldots, f_m\}$. La famille $(f_1, \ldots, f_m, f)$ est liée par maximalité de m, i.e. il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \mu \in K$ non tous nuls, tels que

$$\sum_i \lambda_i f_i + \mu f = \vec{0}.$$

Comme dans le théorème de la base incomplète, $\mu \neq 0$ (sinon l'on contredirait la liberté de $\mathbf{f}$) et donc f est combinaison linéaire de $\mathbf{f}$. Comme c'est vrai pour tout $f \in F$, $\mathbf{f}$ est génératrice, donc une base de F de cardinal m avec $m \leq n$.

Corollaire: supposons $F \subset G$ deux sous-espaces emboités de E de dimension finie n. Si $dim(F) = dim(G)$ alors $F = G$.

preuve: par la proposition qui précède on sait que F et G sont de dimension finie $\leq n$. (En appliquant la même proposition à $F \subset G$ on a de plus $dim(F) \leq dim(G)$.)

Supposons $dim\, F = dim\, G$. Toute base de F contient $dim(F) = dim(G)$ vecteurs. C'est donc une famille libre de G de cardinal $dim(G)$, i.e. une base de G. Tout vecteur de G est donc combinaison linéaire d'éléments de F, i.e. $G \subset F$.

6. Rang d'une famille finie de vecteurs, algorithme de Gauss

Définition: on appelle rang $(\mathbf{v})$ la dimension du sous-espace $Vect(\mathbf{v})$.

Proposition: Soit $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_p)$ une famille finie de E. Alors $Vect(\mathbf{v})$ ne change pas

(i) si l'on permute deux vecteurs de $\mathbf{v}$

(ii) si l'on remplace un vecteur de $\mathbf{v}$ par un multiple non nul de lui-même

(iii) si l'on remplace un vecteur de $\mathbf{v}$ par une combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathbf{v}$.

Ces transformations sont appelées *transformations élémentaires.*

preuve: (i) est clair. Faisons (ii) et (iii) d'un coup: fixons $i_0 \in \{1, \ldots, p\}$ et créons une nouvelle famille $\mathbf{v}' = (v_1, \ldots, v_{i_0-1}, v'_{i_0}, v_{i_0+1}, \ldots, v_p)$ en remplaçant v_{i_0} par la combinaison linéaire

$$v'_{i_0} = \lambda_{i_0} v_{i_0} + \sum_{1 \leq i \leq p,\, i \neq i_0} \lambda_i v_i, \quad \lambda_{i_0} \neq 0.$$

Vérifions $Vect(\mathbf{v}) = Vect(\mathbf{v}')$: tout $v \in Vect(\mathbf{v})$ s'écrit

$$\begin{aligned} v &= \sum_{1 \leq i \leq p} \mu_i v_i, \quad \mu_1, \ldots, \mu_p \in \mathbf{K} \\ &= \sum_{i \neq i_0} \mu_i v_i + \mu_{i_0} v_{i_0} \\ &= \sum_{i \neq i_0} \mu_i v_i + \mu_{i_0} \frac{1}{\lambda_{i_0}} (v'_{i_0} - \sum_{i \neq i_0} \lambda_i v_i) \\ &= \sum_{i \neq i_0} (\mu_i - \mu_{i_0} \frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}}) v_i + \frac{\mu_{i_0}}{\lambda_{i_0}} v'_{i_0} \in Vect(\mathbf{v}'). \end{aligned}$$

Ceci montre $Vect(\mathbf{v}) \subset Vect(\mathbf{v}')$. L'inclusion $Vect(\mathbf{v}') \subset Vect(\mathbf{v})$ est similaire.

Cette observation est à la base d'un algorithme connu sous le nom d' *algorithme du pivot de Gauss*, permettant de déterminer le rang de $\mathbf{v}$ et d'en exhiber une base (plus généralement, de répondre aux questions usuelles d'algèbre linéaire). Afin de le mettre en place, voici un peu de vocabulaire matriciel.

Définition: On appelle *matrice* $n \times p$ à coefficients dans $\mathbf{K}$ tout tableau

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \dots & \dots & a_{n-1p} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

constitué de n lignes et p colonnes d'éléments $a_{ij} \in \mathbf{K}, 1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$.

On écrit (souvent) $M = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$. L'indice i repère la *ligne* (ou *rangée*) de M, l'indice j repère la *colonne* de M. Le scalaire a_{ij} est appelé la *composante* ij de M.

On désigne la $j-$ième colonne de la matrice M par C_j :

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

et la $i-$ème ligne de M par L_i:

$$L_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \end{pmatrix}.$$

Nomenclature: l'ensemble des matrices ayant n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbf{K}$ est noté $M_{n,p}(\mathbf{K})$.

Définition: M est dite *échelonnée* en colonnes si elle satisfait aux conditions de croissance du nombre de zéros suivantes:

(i) si pour C_j on a $a_{ij} = 0$ pour tout $i \leq i_0 - 1$ et $a_{i_0 j} \neq 0$, alors pour C_{j+1} on a $a_{i\,j+1} = 0$ pour tout $i \leq i_0$.

(ii) si C_j est nulle, C_{j+1} est aussi nulle.

Exemple de matrice échelonnée:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit E un $\mathbf{K}-$ espace de dimension n, $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E et $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_p)$ une famille finie de E. Pour $1 \leq j \leq p$, on a

$$v_j = \sum_{1 \leq i \leq n} a_{ij} e_i$$

pour d'uniques coefficients $a_{ij} \in \mathbf{K}$.

Définition: la matrice M de $\mathbf{v}$ dans la base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est la matrice $n \times p$ dont la $j-$ ième colonne C_j est constituée des composantes de v_j dans la base (e_i), i.e. $C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$.

Les transformations élémentaires sur les vecteurs de $\mathbf{v}$ reviennent à effectuer des transformations élémentaires sur les colonnes de M.

Proposition: (Algorithme de Gauss) Toute matrice M peut être mise sous forme échelonnée en colonnes à l'aide de transformations élémentaires sur les colonnes.

preuve: on suppose M non nulle. Voici l'algorithme:

(0) soit i_0 le plus petit indice de ligne pour lequel la ligne L_{i_0} de M est non nulle et soit j_0 le plus petit indice de colonne pour lequel $a_{i_0 j_0} \neq 0$.
Le coefficient $a_{i_0 j_0}$ s'appelle le *pivot*.
Effectuer la permutation de colonnes C_1 et C_{j_0}.
(1) remplacer chaque colonne C_j pour $j \neq j_0$ par la colonne $C_j - \frac{a_{i_0 j}}{a_{i_0 j_0}} C_{j_0}$.

Ceci donne une matrice M' dont les lignes $L'_1, \dots, L'_{i_0-1}$ sont nulles et la ligne L'_{i_0} s'écrit

$$L'_{i_0} = \begin{pmatrix} a_{i_0 j_0} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) itérer les étapes 0 et 1 pour la matrice $M'' \in M_{p-i_0, n-1}(\mathbf{K})$ obtenue à partir de M' en supprimant la première colonne C'_1 et les lignes $L'_1, \dots, L'_{i_0}$.

Détermination du rang de $Vect((v_1, \dots, v_p))$

Soit M la matrice des composantes de la famille $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_p)$ dans la base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$.

- Effectuer des transformations élémentaires sur les colonnes pour mettre cette matrice sous forme échelonnée

- La famille de vecteurs dont les composantes sont les colonnes non nulles de la forme échelonnée constitue une base du sous-espace $Vect(\mathbf{v})$. En particulier le rang est le nombre de colonnes non nulles de la forme échelonnée.

7. Somme, somme directe, sous-espaces supplémentaires.

Théorème (Formule de la dimension de Grassmann)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{K}$ et $F, G \subset E$ deux sous-espaces. On a

$$dim_{\mathbf{K}}(F+G) = dim_{\mathbf{K}}(F) + dim_{\mathbf{K}}(G) - dim_{\mathbf{K}}(F \cap G).$$

Idée de la preuve: choisir une base $(e_1, \dots, e_r)$ du sous-espace $F \cap G$ et la compléter (i) en une base $(e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_s)$ de F et (ii) en une base $(e_1, \dots, e_r, g_1, \dots, g_t)$ de G. La preuve consiste à montrer que la famille

$$(e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_t)$$

est une base de $F+G$ (cf cours pour la vérification explicite).

Pour rappel, les sous-espaces F et G sont dits *supplémentaires* ou en *somme directe* dans E si $E = F + G$ et $F \cap G = \{\vec{0}\}$; on écrit alors $E = F \oplus G$.

Proposition (Existence d'un supplémentaire)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbf{K}$ et $F \subset E$ un sous-espace. Alors il existe un sous-espace $G \subset E$ tel que

$$E = F \oplus G.$$

Idée de la preuve: soit $r = dim_{\mathbf{K}}(F)$. Toute base $(e_1, \dots, e_r)$ de F peut-être complétée en une base $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ de E. La preuve consiste à vérifier que le sous-espace

$$G = Vect(e_{r+1}, \dots, e_n)$$

convient (cf cours pour les vérifications).

Compléments sur la somme directe:

(i) $E = F \oplus G$ ssi tout élément $u \in E$ s'écrit d'une et une seule manière sous la forme $u = f + g, f \in F$ et $g \in G$.

(ii) (Généralisation de la somme à $p \in N \setminus \{0\}$ sous espaces)

Soient $E_1, \ldots, E_p$, p sous-espaces de E. On dit que E est somme des sous-espaces $E_1, \ldots, E_p$ si pour tout $u \in E$ il existe $e_j \in E_j, j \in \{1, \ldots, p\}$, tels que $u = e_1 + e_2 + \ldots + e_p$. On écrit alors

$$E = E_1 + E_2 + \ldots + E_p.$$

Suivant le (i), on dit que E est somme directe des sous-espaces $E_1, \ldots, E_p$ si l'écriture $u = e_1 + \ldots + e_p$ est unique; on écrit alors

$$E = \oplus_{j=1}^{p} E_j.$$

Attention: lorsque $E = E_1 + \ldots + E_p$, cette somme est directe ssi

$$E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}, \, (E_1 + E_2) \cap E_3 = \{\vec{0}\}, \ldots, (E_1 + \ldots + E_{p-1}) \cap E_p = \{\vec{0}\}.$$