Université Lyon 1
Classes préparatoires 2015-2016
Algèbre linéaire
Serge Parmentier

Chapitre 4: Applications linéaires

1. Applications linéaires

On se donne deux $\mathbf{K}$-espaces E et F.

Définition: Une application $\phi : E \to F$ est dite *linéaire* si quels que soient $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbf{K}$ on a

$$\phi(u+v) = \phi(u) + \phi(v), \quad \phi(\lambda u) = \lambda \phi(u).$$

Remarque sur le vocabulaire: on utilise souvent la terminologie suivante
morphisme d'espaces vectoriels = application linéaire $\phi : E \to F$
isomorphisme d'espaces vectoriels = application linéaire bijective $\phi : E \to F$
endomorphisme de E= application linéaire $\phi : E \to E$
automorphisme de E= application linéaire bijective $\phi : E \to E$

Voici quelques propriétés déduites immédiatement de la définition:
supposons $\phi : E \to F$ linéaire. On a

(i) $\phi(\vec{0}_E) = \phi(\vec{0}_E + \vec{0}_E) = \phi(\vec{0}_E) + \phi(\vec{0}_E)$ donc $\phi(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$.
(ii) pour tout $u, u' \in E, \lambda, \lambda' \in \mathbf{K}$,

$$\phi(\lambda u + \lambda' u') = \phi(\lambda u) + \phi(\lambda' u') = \lambda \phi(u) + \lambda' \phi(u').$$

(iii) si ϕ est de plus bijective, alors l'application réciproque $\phi^{-1} : F \to E$ est linéaire. (Cf cours.)

Exemples d'applications linéaires:

1. L'application nulle $E \to F : u \mapsto \vec{0}_F$ et l'application identité $id_E : E \to E : u \mapsto u$ sont linéaires.
2. Soit $a \in \mathbf{K}$. L'application $\mathbf{K} \to \mathbf{K} : x \mapsto ax$ est linéaire.
3. Le calcul de la dérivée est une opération linéaire: si les applications $f, g : I \to \mathbf{R}$ sont dérivables sur l'intervalle $I \subset \mathbf{R}$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, alors λf et $f + g$ sont dérivables et pour tout $x \in I$,

$$(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x), \quad (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

4. L'application

$$\pi : \mathbf{K}^3 \to \mathbf{K}^3 : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, 0)$$

est linéaire. π est appelée la *projection* sur le plan $\Pi = Vect((1,0,0),(0,1,0))$ parallèlement à la droite $D = Vect((0,0,1))$. (Il est instructif de visualiser l'effet de π sur une figure.)

5. L'exemple 4 est un cas particulier de la situation suivante: supposons que E soit somme directe des sous-espaces E_1 et E_2:

$$E = E_1 \oplus E_2.$$

Tout $u \in E$ s'écrit alors d'une unique manière sous la forme

$$u = u_1 + u_2, \quad u_1 \in E_1, u_2 \in E_2.$$

L'application linéaire

$$\pi : E \to E : u = u_1 + u_2 \mapsto u_1$$

est appelée la *projection sur E_1 parallèlement à E_2*.

6. Supposons $\phi : \mathbf{K}^2 \to \mathbf{K}^2$ linéaire avec $\phi(1,0) = (a,b)$ et $\phi(0,1) = (c,d)$. Pour $(x_1,x_2) \in \mathbf{K}^2$, on a

$$\begin{aligned}\phi(x_1,x_2) &= \phi(x_1(1,0) + x_2(0,1)) \\ &= x_1\phi(1,0) + x_2\phi(0,1) \\ &= x_1(a,b) + x_2(c,d) \\ &= (ax_1 bx_1) + (cx_2, dx_2) \\ &= (ax_1 + cx_2, bx_1 + dx_2)\end{aligned}$$

Réciproquement, pour tout $(a,b,c,d) \in \mathbf{K}^4$ l'application ϕ définie par

$$\phi(x_1,x_2) = (ax_1 + cx_2, bx_1 + dx_2)$$

est linéaire. Observer que l' on vient d'obtenir *toutes* les applications linéaires de $\mathbf{K}^2$ vers $\mathbf{K}^2$.

7. (Cas particulier de 6) Soit $\theta \in [0, 2\pi]$. On appelle *rotation d'angle* θ l'application linéaire

$$\begin{array}{lcl} Rot_\theta : \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^2 \\ (x_1,x_2) & \mapsto & (cos\theta\ x_1 - sin\theta\ x_2, sin\theta\ x_1 + cos\theta\ x_2) \end{array}$$

(Un conseil: représenter l'image de la base canonique.)

On va extraire de l' exemple 6 un *énoncé général* qui décrit toutes les applications linéaires d'un espace de dimension finie E vers un espace F.

Proposition: soient E et F deux $\mathbf{K}-$ espaces, avec E de dimension finie n. Fixons une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E et choisissons arbitrairement une famille $(f_1, \ldots, f_n)$ de cardinal n de F. Alors, il existe une et une seule application linéaire $\phi : E \to F$ telle que pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\phi(e_j) = f_j$.

preuve:

1. Unicité: supposons que ϕ et ϕ' sont deux applications linéaires de E vers F telles que pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\phi(e_j) = f_j = \phi'(e_j).$$

On va mq que pour tout $u \in E$,

$$\phi(u) = \phi'(u).$$

Puisque $(e_j)_{1 \le j \le n}$ est une base de E il existe d'uniques scalaires $(\lambda_j)_{1 \le j \le n}$ tels que $u = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j$. On a alors

$$\phi(u) = \phi(\sum_j \lambda_j e_j) = \sum_j \lambda_j \phi(e_j) = \sum_j \lambda_j f_j = \sum_j \lambda_j \phi'(e_j) = \phi'(\sum_j \lambda_j e_j) = \phi'(u).$$

2. Existence: définir $\phi : E \to F$ comme suit: si $u = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j$ alors $\phi(u) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j$.

Cette application est à valeurs dans F. Elle est linéaire car

$$\begin{aligned}
\phi(u+u') &= \phi(\sum_j \lambda_j e_j + \sum_j \lambda'_j e_j) \\
&= \phi(\sum_j (\lambda_j + \lambda'_j) e_j) \\
&= \sum_j (\lambda_j + \lambda'_j) f_j \\
&= \sum_j \lambda_j f_j + \sum_j \lambda'_j f_j \\
&= \phi(u) + \phi(u')
\end{aligned}$$

$$\phi(\lambda u) = \phi(\sum_j (\lambda\lambda_j) e_j) = \sum_j (\lambda\lambda_j) f_j = \lambda \sum_j \lambda_j f_j = \lambda\phi(u).$$

Enfin, observer que l'on a bien $\phi(e_j) = f_j$ pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

On retient de cette proposition qu' *une application linéaire $\phi : E \to F$ est déterminée par l'image d'une base arbitraire de E.* L'image par ϕ d'une base est donc la seule information significative sur ϕ.

Cas particuliers:

1. Prenons $E = \mathbf{K}^n$, $F = \mathbf{K}$. Notons $(e_j)_{1 \leq j \leq n}$ la base canonique de $E = \mathbf{K}^n$ et soit $(a_1, \ldots, a_n)$ un $n-$ uplet de points de $F = \mathbf{K}$. Alors l'application

$$\phi : \mathbf{K}^n \to \mathbf{K} : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$$

est linéaire et c'est l'unique application linéaire $\phi : \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}$ telle que pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\phi(e_j) = a_j$.

Voici un exemple *chiffré*: l'application

$$\mathbf{R^2} \to \mathbf{R} : (x_1, x_2) \mapsto x_1 + 2x_2$$

est linéaire et c'est l'unique application linéaire $\phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ telle que

$$\phi((1,0)) = 1, \quad \phi((0,1)) = 2.$$

2. Prenons $E = \mathbf{K}^n$ muni de sa base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$, $F = \mathbf{K}^p$ et soit n éléments

$$f_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{pj}), \ \ j \in \{1, \ldots, n\}$$

de $\mathbf{K}^p$.

Observer que se donner $f_j, j \in \{1, \ldots n\}$, équivaut à se donner une matrice $A \in M_{pn}(\mathbf{K})$ dont la colonne C_j est formée des p composantes de f_j:

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{pj} \end{pmatrix}.$$

L'application

$$\begin{aligned}\phi_A : \mathbf{K}^n &\to \mathbf{K}^p\\ (x_1,\ldots,x_n) &\mapsto \sum_{j=1}^n x_j(a_{1j},\ldots,a_{pj})\\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \ldots, a_{p1}x_1 + \ldots + a_{pn}x_n)\end{aligned}$$

est linéaire et c'est l'unique application linéaire de $\mathbf{K}^n$ vers $\mathbf{K}^p$ telle que $\phi_A(e_j) = f_j$.
Dans le chapitre qui suit, on dira que A est la *matrice* de ϕ_A, rapportée aux bases canoniques de $\mathbf{K}^n$ et de $\mathbf{K}^p$.

Voici un exemple *chiffré*: prenons $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, $n = 2$, $p = 3$ et

$$f_1 = (1,2,3), \quad f_2 = (4,5,6).$$

La matrice A dont les colonnes sont les composantes de f_1 et f_2 est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix}$$

et l'application linéaire

$$\phi_A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$$

est donnée par

$$\phi_A(x_1,x_2) = (x_1 + 4x_2, 2x_1 + 5x_2, 3x_1 + 6x_2).$$

C'est l'unique application linéaire de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{R}^3$ pour laquelle $\phi_A(1,0) = (1,2,3)$ et $\phi_A(0,1) = (4,5,6)$.

3. *Système linéaire et application linéaire*

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq n} \in M_{pn}(\mathbf{K})$. Le système linéaire de p équations à n inconnues de matrice A est le système (S) suivant

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j = b_1\\ \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j = b_2\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^n a_{pj}x_j = b_p\end{gathered}$$

En terme de l'application linéaire ϕ_A du cas particulier 2, le système (S) est équivalent à l'équation

$$\phi_A(x_1,\ldots,x_n) = (b_1,\ldots,b_p).$$

Résoudre le système (S) consiste donc à trouver tous les antécédents de $(b_1,\ldots,b_p) \in \mathbf{K}^p$ par l'application linéaire $\phi_A : \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^p$, i.e. l'ensemble des solutions de (S) est

$$\phi_A^{-1}\{(b_1,\ldots,b_p)\} \subset \mathbf{K}^n.$$

2. Sous-espaces associés à une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbf{K}$ - espaces de dimensions $n = dim_{\mathbf{K}}(E)$ et $m = dim_{\mathbf{K}}(F)$. Pour une application linéaire $\phi : E \to F$, on définit l'image $Im\,\phi \subset F$ et le noyau $Ker\,\phi \subset E$ de ϕ comme suit:

$$Im\,\phi = \{v \in F, \exists u \in E, v = \phi(u)\} = \{\phi(u), u \in E\} = \phi(E) \subset F$$

et

$$Ker\,\phi = \{u \in E, \phi(u) = \vec{0}_F\} = \phi^{-1}(\{\vec{0}_F\}) \subset E$$

où $\vec{0}_F$ est le vecteur nul de F.

Proposition: $Im\,\phi$ est un sous-espace de F et $Ker\,\phi$ est un sous-espace de E.

preuve: Commençons par $Im\,\phi$:
il s'agit de mq pour tout $v, v' \in Im\,\phi$ et tout $\lambda \in \mathbf{K}$, $v + v' \in Im\,\phi$ et $\lambda v \in Im\,\phi$.
Pour $v, v' \in Im\,\phi$, il existe $u, u' \in E$ tels que $v = \phi(u)$ et $v' = \phi(u')$ et on a

$$v + v' = \phi(u) + \phi(u') = \phi(u + u') \in Im\,\phi$$

et

$$\lambda v = \lambda\phi(u) = \phi(\lambda u) \in Im\,\phi.$$

Passons au noyau $Ker\,\phi$: pour $u, u' \in Ker\,\phi$ et $\lambda \in \mathbf{K}$, on a

$$\phi(u + u') = \phi(u) + \phi(u') = \vec{0}_F + \vec{0}_F = \vec{0}_F$$

donc $u + u' \in Ker\,\phi$.
De même, $\phi(\lambda u) = \lambda\phi(u) = \lambda\vec{0}_F = \vec{0}_F$, i.e. $\lambda u \in Ker\,\phi$.

Premiers exemples:
1. Soit $\phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} : (x_1, x_2) \mapsto x_1 - x_2$.

$Im\,\phi$: tout $x \in \mathbf{R}$ s'écrit $x = x - 0 = \phi(x, 0)$ donc $Im\,\phi = \mathbf{R}$.

$Ker\,\phi$: $0 = \phi(x_1, x_2) = x_1 - x_2$ ssi $x_1 = x_2$ donc $Ker\,\phi = \{(x, x), x \in \mathbf{R}\}$; c'est la droite vectorielle diagonale $Vect((1, 1))$.

2. Soit la projection $\pi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R^3} : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, 0)$.

$Im\,\pi$: $(a, b, c) \in Im\,\pi$ ssi $c = 0$, auquel cas $(a, b, 0) = \pi(a, b, 0)$. $Im\,\pi$ est donc le plan vectoriel $\Pi = \{(x, y, 0), x, y \in \mathbf{R}\}$.

$Ker\,\pi$: $\pi(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ ssi $x_1 = x_2 = 0$. Donc $Ker\,\pi = \{(0, 0, z), z \in \mathbf{R}\}$; c'est l'axe de coordonnée $Vect((0, 0, 1))$.

3. soit $\mathbf{R}_{\leq n}[X]$ l'espace des polynômes réels de degré au plus n. L'application d'évaluation

$$\phi : \mathbf{R}_{\leq n}[X] \to \mathbf{R} : P \mapsto P(0)$$

est linéaire.

$Im\,\phi$: pour tout $a \in \mathbf{R}$, $\phi(a) = a$. On a donc $Im\,\phi = \mathbf{R}$.

$Ker\,\phi$: pour $P = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$, on a $P(0) = a_0$. Dès lors, $Ker\,\phi$ est le sous-espace des polynômes sans terme constant ($a_0 = 0$).

Définition: On appelle rang de l'application linéaire $\phi : E \to F$ la dimension du sous-espace $Im\,\phi$ de F.

Détermination du rang: soit $(e_j)_{1\leq j\leq n}$ une base de E. On a

$$Im\,\phi = Vect(\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n)).$$

En particulier, le rang de ϕ est le rang de la famille $(\phi(e_j))_{1\leq j\leq n}$.

preuve: soit $v \in Im\phi$ et $u = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \in E$ tel que $v = \phi(u)$. On a

$$v = \phi(\sum_j \lambda_j e_j) = \sum_j \lambda_j \phi(e_j).$$

v est donc combinaison linéaire de la famille $(\phi(e_j))_{1\leq j\leq n}$, i.e. $v \in Vect(\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n))$.
Réciproquement, tout $v \in Vect(\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n))$ s'écrit $v = \sum_j \lambda_j \phi(e_j)$ pour des scalaires $\lambda_j \in \mathbf{K}$. Par linéarité, $v = \phi(\sum_j \lambda_j e_j) \in Im\,\phi$.

Par définition, l'application $\phi : E \to F$ est surjective ssi $Im\,\phi = F$.
Le noyau $Ker\,\phi$ est, quant a lui, lié à l'injectivité de ϕ:

Proposition: soit $\phi : E \to F$ une application linéaire. Alors, $Ker\,\phi = \{\vec{0}_E\}$ ssi ϕ est injective.
preuve: on suppose $Ker\,\phi = \{\vec{0}_E\}$. Si $u, u' \in E$ sont tels que $\phi(u) = \phi(u')$, on a

$$\vec{0}_F = \phi(u) - \phi(u') = \phi(u - u'),$$

i.e. $u - u' \in Ker\,\phi = \{\vec{0}_E\}$. D'où $u = u'$.
Supposons ϕ injective. On sait que $\phi(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$. Par injectivité, aucun $v \neq \vec{0}_E$ ne peut avoir $\vec{0}_F$ pour image par ϕ. $Ker\,\phi$ est donc le singleton $\{\vec{0}_E\}$.

Attention: La relation entre injectivité et noyau ne s'applique pas aux applications non linéaires. Par exemple, pour l'application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto x^2$, on a $f(x) = 0$ ssi $x = 0$, mais f n'est pas injective: $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = 2$.

Application aux systèmes linéaires:

Soit une matrice $A \in M_{pn}(\mathbf{K})$ et

$$\phi_A(x_1, \ldots, x_n) = (b_1, \ldots, b_p)$$

le système (S) de p équations linéaires à n inconnues de matrice A (cf fin du paragraphe 1).
Il y a deux cas à traiter:
(i) Le cas *homogène*: $(b_1, \ldots, b_p) = (0, \ldots, 0)$.
Le $n-$ uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n$ est solution de (S) ssi

$$\phi_A(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$$

ssi

$$(x_1, \ldots, x_n) \in Ker\,\phi_A \subset \mathbf{K}^n.$$

L'ensemble des solutions de (S) est donc égal à $Ker\,\phi_A$. En particulier, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$.

(ii) Le cas *inhomogène*: $(b_1, \ldots, b_p) \neq (0, \ldots, 0)$.
Ce système admet une solution ssi $(b_1, \ldots, b_p) \in Im\,\phi_A$

Supposons $(b_1, \ldots, b_p) \in Im\phi_A$ et soit $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ une solution de (S).

Pour toute solution $(x_1', \ldots, x_n')$ de (S), on a

$$\phi_A(x_1', \ldots, x_n') = (b_1, \ldots, b_p) = \phi_A(x_1^0, \ldots, x_n^0)$$

et donc

$$\phi_A((x_1', \ldots, x_n') - (x_1^0, \ldots, x_n^0)) = (0, \ldots, 0)$$

i.e.

$$(x_1', \ldots, x_n') - (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in Ker\,\phi_A$$

Réciproquement, si $(y_1, \ldots, y_n) \in Ker\,\phi_A$, alors

$$(x_1', \ldots, x_n') = (x_1^0, \ldots, x_n^0) + (y_1, \ldots, y_n)$$

est solution de (S).

Conclusion: l'ensemble des solutions de (S) est l'ensemble des $n-$ uplets

$$\{(x_1^0, \ldots, x_n^0) + (y_1, \ldots, y_n), \quad (y_1, \ldots, y_n) \in Ker\,\phi_A\}.$$

On dit que *la solution générale du système inhomogène* (S) *est la somme d'une solution particulière* $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *de* (S) *et de la solution générale de l'équation homogène obtenue en remplaçant* $(b_1, \ldots, b_p)$ *par* $(0, \ldots, 0)$ *dans* (S).

3. Applications linéaires et familles finies.

Soit E et F deux $\mathbf{K}$-espaces de dimension finie $n = dim_{\mathbf{K}}(E)$, $m = dim_{\mathbf{K}}(F)$.

Proposition: soit $\phi : E \to F$ une application linéaire.

(i) ϕ est injective ssi l'image par ϕ de toute famille libre de E est libre dans F

(ii) ϕ est surjective ssi l'image de toute famille génératrice de E est génératrice de F.

(iii) ϕ est bijective ssi l'image par ϕ de toute base de E est une base de F.

preuve: (i) supposons ϕ injective, i.e. supposons $Ker\,\phi = \{\vec{0}_E\}$. Il s'agit de mq si $(v_1, \ldots, v_r)$ est libre dans E, alors $(\phi(v_1), \ldots, \phi(v_r))$ est libre dans F: supposons pour cela que $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont tels que

$$\lambda_1\phi(v_1) + \ldots + \lambda_r\phi(v_r) = \vec{0}_F$$

Par linéarité de ϕ, cette condition s'écrit

$$\phi(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r) = \vec{0}_F$$

i.e.

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r \in Ker\,\phi.$$

Le noyau étant nul,

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r = \vec{0}_E,$$

la liberté de $(v_1, \ldots, v_r)$ implique $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$.

Réciproquement, supposons que l'image par ϕ de toute famille libre est libre.

Pour tout $v \in E \setminus \{\vec{0}_E\}$, on sait que la famille (v) (de cardinal 1) est libre; par hypothèse, la famille $(\phi(v))$ l'est aussi et donc $\phi(v) \neq \vec{0}_F$.
Conclusion: le seul élément de $Ker\,\phi$ est $\vec{0}_E$, i.e. ϕ est injective.

(ii) Supposons ϕ surjective et soit $(v_1, \ldots, v_s)$ une famille génératrice de E. Il s'agit de mq tout $w \in F$ est combinaison linéaire de $(\phi(v_1), \ldots, \phi(v_s))$: soit $w \in F$. Par nos hypothèses, il existe $u \in E$ tel que $w = \phi(u)$ et des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbf{K}$ tels que $u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_s v_s$. On a alors

$$w = \phi(u) = \phi(\sum_j \lambda_j v_j) = \sum_j \lambda_j \phi(v_j).$$

Réciproquement, supposons que l'image par ϕ de la famille $(v_1, \ldots, v_s)$ génératrice de E soit génératrice de F. Tout $w \in F$ est alors combinaison linéaire de $(\phi(v_1), \ldots, \phi(v_s))$:

$$w = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \phi(v_j) = \phi(\sum_{j=1}^{s} \lambda_j v_j) \in Im\,\phi.$$

ϕ est donc surjective.

(iii) Supposons ϕ bijective et soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Par (i), $(\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n))$ est libre et par (ii), elle est génératrice. C'est donc une base.

Réciproquement, supposons que l'image par ϕ de toute base de E soit une base de F.
Commençons par mq ϕ est injective, i.e. $Ker\,\phi = \{\vec{0}_E\}$.
On sait que tout $v \in E \setminus \{\vec{0}_E\}$ peut être complété en une base $(v, v_2, \ldots, v_n)$ de E. Par hypothèse, $(\phi(v), \phi(v_2), \ldots, \phi(v_n))$ est alors une base F; elle est donc libre, en particulier $\phi(v) \neq \vec{0}_F$.
La surjectivité s'obtient comme au (ii): tout $w \in F$ s'écrit dans la base image $w = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \phi(e_j) = \phi(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j) \in Im\,\phi$.

Théorème du rang: Soit E et F deux $\mathbf{K}$ - espaces avec $dim_{\mathbf{K}}(E) = n$ et soit $\phi : E \to F$ une application linéaire. Alors

$$dim_{\mathbf{K}} E = dim_{\mathbf{K}} Ker\,\phi + dim_{\mathbf{K}}\, Im\,\phi.$$

preuve: (i) on commence par choisir une base $(e_1, \ldots, e_r)$ du noyau ker ϕ que l'on complète en une base $(e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n)$ de E. On a vu au chapitre 3 que dans ce cas

$$E = Ker\,\phi \oplus Vect(e_{r+1}, \ldots, e_n).$$

(ii) On a montré plus haut que $Im\,\phi = Vect(\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n))$. Puisque $\phi(e_1) = \ldots = \phi(e_r) = \vec{0}_F$, on a

$$Im\,\phi = Vect(\phi(e_{r+1}), \ldots, \phi(e_n)).$$

(iii) Mq la famille $(\phi(e_{r+1}), \ldots, \phi(e_n))$ est libre dans F: si $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n$ sont tels que

$$\lambda_{r+1}\phi(e_{r+1}) + \ldots + \lambda_n \phi(e_n) = \vec{0}_F$$

i.e.

$$\phi(\lambda_{r+1} e_{r+1} + \ldots + \lambda_n e_n) = \vec{0}_F,$$

alors

$$\lambda_{r+1}e_{r+1} + \ldots + \lambda_n e_n \in Ker\,\phi \cap Vect(e_{r+1}, \ldots, e_n).$$

Ces deux sous-espaces étant d'intersection nulle (somme directe du (i)),

$$\lambda_{r+1}e_{r+1} + \ldots + \lambda_n e_n = \vec{0}_E$$

Par liberté, $\lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_n = 0$.
(iv) Par (ii) et (iii), $(\phi(e_{r+1}), \ldots, \phi(e_n))$ est une base de $Im\,\phi$ de cardinal $n - r$. On a donc

$$dim_{\mathbf{K}}E = n = r + (n - r) = dim_{\mathbf{K}}Ker\,\phi + dim_{\mathbf{K}}Im\phi.$$

Proposition (Bijectivité) On suppose E et F de même dimension $n \in N \setminus \{0\}$ et soit $\phi : E \to F$ une application linéaire. Alors,
ϕ est injective ssi ϕ est surjective ssi ϕ est bijective.

preuve: il suffit de mq ϕ est injective ssi ϕ est surjective.
On sait que ϕ est injective ssi $Ker\,\phi$ est nul ssi $dim\,Ker\,\phi = 0$. Or, par le théorème du rang, $dim\,Ker\phi = 0$ ssi $dim\,Im\phi = dim\,E =_{\text{(par hypoth.)}} dim\,F$. $Im\,\phi$ étant un sous-espace de F, ceci est vrai ssi $Im\,\phi = F$.

4. L'ensemble des applications linéaires

Soient E et F deux $\mathbf{K}$ - espaces.
Cette section porte sur des propriétés d'ensemble. On va s'intéresser, non pas à une application linéaire $\phi : E \to F$, mais à l'ensemble dont les éléments sont ces applications.
On désigne par $L(E, F)$ l' *ensemble des applications linéaires* $\phi : E \to F$. Lorsque $E = F$, on écrit $L(E)$ au lieu de $L(E, E)$.
Pour $\phi, \psi \in L(E, F)$ et $\lambda \in \mathbf{K}$, on définit

$$\phi +_L \psi : E \to F : u \mapsto \phi(u) + \psi(u), \quad \lambda \cdot_L \phi : E \to F : u \mapsto \lambda(\phi(u)).$$

Proposition
(i) $\phi +_L \psi$ et $\lambda \cdot_L \phi$ sont des applications linéaires.
(ii) $L(E, F)$ muni des lois

$$+_L : L(E, F) \times L(E, F) \to L(E, F) : (\phi, \psi) \mapsto \phi +_L \psi$$

et

$$\cdot_L : \mathbf{K} \times L(E, F) \to L(E, F) : (\lambda, \phi) \mapsto \lambda \cdot_L \phi$$

est un $\mathbf{K}-$ espace.
preuve: (i)

$$\begin{aligned}(\phi +_L \psi)(u + u') &= \phi(u + u') + \psi(u + u') \\ &= \phi(u) + \phi(u') + \psi(u) + \psi(u') \\ &= (\phi +_L \psi)(u) + (\phi +_L \psi)(u')\end{aligned}$$

Vérification analogue pour

$$(\phi +_L \psi)(\lambda u) = \lambda(\phi +_L \psi)(u).$$

(ii) $+_L$ est associative et commutative; le neutre pour $+_L$ est l'application nulle $E \to F : u \mapsto \vec{0}_F$ et l'opposé de ψ est l'application $-\psi$.

On vérifie sans peine les autres conditions: pour $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$,

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot_L (\phi +_L \psi) &= \lambda \cdot_L \phi +_L \lambda \cdot_L \psi \\
(\lambda + \mu) \cdot_L \phi &= \lambda \cdot_L \phi +_L \mu \cdot_L \psi \\
\lambda \cdot_L (\phi +_L \psi) &= \lambda \cdot_L \phi +_L \lambda \cdot_L \psi \\
(\lambda\mu) \cdot_L \phi &= \lambda \cdot_L (\mu \cdot_L \phi) \\
1 \cdot_L \phi &= \phi
\end{aligned}$$

Une fois ces lois acquises, on écrira toujours $+$ pour $+_L$ et on omettra d'écrire $\cdot_L$.

Proposition: Soient E, F, G des $K-$ espaces, $\phi, \phi' : E \to F$ et $\psi, \psi' : F \to G$ des applications linéaires et $\lambda, \lambda' \in \mathbf{K}$.

(i) $\psi \circ \phi$ est linéaire

(ii) $\psi \circ (\lambda\phi + \lambda'\phi') = \lambda(\psi \circ \phi) + \lambda'(\psi \circ \phi')$
$(\lambda\psi + \lambda'\psi') \circ \phi = \lambda(\psi \circ \phi) + \lambda'(\psi' \circ \phi)$.

La vérification est laissée au lecteur.

Voici un corollaire important.

Corollaire: L'ensemble $L(E)$ des endomorphismes de E muni de la somme $+$ et de la composition $\circ$ des applications linéaires est un anneau unitaire d'unité $id_E : E \to E$.

preuve: on sait déjà (cf $L(E, F)$ plus haut) que la somme est associative, de neutre l'application nulle $u \mapsto \vec{0}_E$, à opposés (l'opposé de ϕ est l'application $-\phi$) et commutative.
La composition des applications est associative: $(\phi \circ \phi') \circ \phi'' = \phi \circ (\phi' \circ \phi'')$ (ce fait est indépendant de la linéarité), de neutre id_E ($id_E \circ \phi = \phi \circ id_E = \phi$).
Enfin, le point (ii) (avec $\lambda = \lambda' = 1_{\mathbf{K}}$) de la proposition qui précède nous dit que la composition est distributive à gauche et à droite sur la somme $+$.

Attention: $L(E)$ n'est pas un anneau commutatif. Par exemple, dans $L(\mathbf{K}^2)$, pour les applications

$$\phi(x_1, x_2) = (0, x_1), \quad \psi(x_1, x_2) = (0, x_2),$$

on a

$$\begin{aligned}
(\psi \circ \phi)(x_1, x_2) &= \psi(0, x_1) = (0, x_1) \\
(\phi \circ \psi)(x_1, x_2) &= \phi(0, x_2) = (0, 0)
\end{aligned}$$