**Université Claude Bernard - Lyon 1** Semestre d'automne 2013-2014

Math I Algèbre - Prépa 1ère année. Groupes P3 et P4

---

**Feuille d'exercices n° 3**

Nombres complexes

---

# 1 Rappels et Calculs

**Exercice 1.**

1. Donner un exemple d'une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, une fonction $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et une fonction $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
2. Est-ce que $f(t) = (3t+1, 2t)$ est injective ? surjective ?
3. Est-ce que $g(x, y) = 3x + y + 1$ est injective ? surjective ? Calculer $g^{-1}([-1, 1])$.
4. Est-ce que $k(x, y) = (3x + y + 1, x - y)$ est injective ? surjective ?
5. Soit $h(x, y) = (3x + y + 1, ax + by)$ une fonction $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ où $a, b \in \mathbb{R}$. Pour quels $(a, b)$ la fonction $h(x, y)$ soit injective ? surjective ?

**Exercice 2.** Calculer $i^n,\ n \in \mathbb{Z}$.

**Exercice 3.** Montrer que $(1+i)^8 \in \mathbb{R}^+$.

**Exercice 4.** Soit $z_1 = 3 + 2i$ et $z_2 = 2 - i$; Calculer $z_1 + z_2;\ z_1 \cdot z_2;\ z_1 - z_2;\ z_1 - 2z_2;\ 2z_1 - 3z_2;\ z^2$.

**Exercice 5.** Résoudre $az + b = 0$ dans $\mathbb{C}$ où

$$1.\left\{\begin{array}{lcl} a & = & 3-2i \\ b & = & 1+i \end{array}\right. \quad 2.\left\{\begin{array}{lcl} a & = & 1+i \\ b & = & 3-2i \end{array}\right. \quad 3.\left\{\begin{array}{lcl} a & = & 1+3i \\ b & = & 5-15i \end{array}\right.$$

**Exercice 6.** Trouver le conjugué de $z = \dfrac{4-5i}{3+i}$.

**Exercice 7.**

1. Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. Reécrire en fonction de $\overline{z}$ et $\overline{z'}$ les expressions suivantes : $\overline{z+z'},\ \overline{-z},\ \overline{z \cdot z'},\ \overline{z^n},\ \overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}$ $(z' \neq 0)$.
2. Trouver le conjugué de $w = \dfrac{2z^2 - i}{5z + 1}$.
3. Montrer que si un polynôme $P$, à coefficients réels, admet un nombre complexe $z$ comme racine alors $\overline{z}$ est aussi une racine de $P$.
4. Montrer que $z_0 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ est une racine de $p(z) = z^2 + z + 1$, puis trouver la deuxième racine de $p(z)$.

**Exercice 8.** Déterminer le lieu des points $M$ d'affixe $z$ telle que $\dfrac{iz-1}{z-i}$ soit réel.

**Exercice 9.** Soit $z \in \mathbb{C}$. Résoudre $z^2 = \bar{z}$.

**Exercice 10.** Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $|z-i| = |z+i|$ si et seulement si $z$ est réel.

**Exercice 11.** Soient $z$ et $z'$ deux nombres complexes de module 1 tels que $zz' \neq -1$. Démontrer que $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est réel, et préciser son module.

## 2 Forme algébrique, forme trigonométrique

**Exercice 12.** Calculer le module et l'argument de $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$. Reécrire sous forme trigonométrique $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^4$.

**Exercice 13.** On note $z_1 = \dfrac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1+i$. On définit $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1. Ecrire $z_1, z_2$ et $z_3$ sous forme trigonométrique.
2. En déduire des expressions de $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

**Exercice 14.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer une forme trigonométrique de $(1+i)^n$. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression simple de $(1+i)^n + (1-i)^n$.

**Exercice 15.** Soit $c \in \mathbb{C}$ tel que $|c| < 1$.

1. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a : $|z+c| \leq |1+\bar{c}z|$ si et seulement si $|z| \leq 1$.
2. On note $D = \{z \in \mathbb{C} || z| \leq 1\}$ et $C = \{z \in \mathbb{C} || z| = 1\}$. Montrer que l'application

$$f : D \to D, z \mapsto \frac{z+c}{1+\bar{c}z}$$

   est une bijection telle que $f(C) = C$.

**Exercice 16.** Réduction de $a\cos x + b\sin x$.

1. Soit $a$ et $b$ deux réels. Démontrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}_+$ et $t \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ a\cos x + b\sin x = r\cos(x-t)$$

2. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ qui vérifient $\cos x + \sin x = 1$.

**Exercice 17.** Linéariser $\cos^5(x)$ et $\cos^2(x)\sin^3(x)$.

**Exercice 18.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ ainsi que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

## 3 Equations, Racines carrées

**Exercice 19.** Résoudre en $z \in \mathbb{C}$ l'équation $e^z = 3\sqrt{3} - 3i$.

**Exercice 20.** Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants : $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 8 - 6i$.

**Exercice 21.** Déterminer les racines carrées de $Z = \sqrt{3} + i$ sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

**Exercice 22.** Résoudre les équations du second degré suivantes :

**1.** $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$ **2.** $iz^2 + (4i - 3)z + i - 5 = 0$
**3.** $z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$.

**Exercice 23.** On considère l'équation en $z \in \mathbb{C}$ suivante : $z^3 + (1 - 3i)z^2 - (6 - i)z + 10i = 0$.

1. Déterminer une racine réelle $z_0$ de cette équation.
2. Pour $z \in \mathbb{C}$, factoriser $z^3 + (1 - 3i)z^2 - (6 - i)z + 10i$ par $(z - z_0)$.
3. Résoudre l'équation.

**Exercice 24.** Résoudre en $z \in \mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$\begin{array}{llll} a. & z^3 = -8i, & b. \quad z^5 - z = 0, & c. \quad 27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0, \\ d. & z^2\bar{z}^7 = 1, & e. \quad z^6 - (3+2i)z^3 + 2 + 2i = 0. & \end{array}$$

**Exercice 25.** Résoudre l'équation $z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ et en déduire des expressions de $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$.

**Exercice 26.** Soit $w \in \mathbb{C}$ une racine $n$-ième de 1. Montrer que $1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1} = 0$.

**Exercice 27.** Soient $a = \cos(\frac{2\pi}{5})$, $b = \cos(\frac{4\pi}{5})$, $s = a + b$ et $p = a \cdot b$.
En utilisant la formule d'Euler et l'exercice précédent, calculer $s$ et $p$. En déduire les valeurs de $a$ et $b$.

**Exercice 28.** Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1. Soit $w$ une racine $n$-ième de 1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (1 + w^k)^n$.
2. Calculer le produit et la somme des racines $n$-ièmes de 1.