Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2013-2014

Math I Algèbre - Prépa 1ère année. Groupes P3 et P4

Feuille d'exercices n° 2

ENSEMBLES. APPLICATIONS

Exercice 1.

1. On note $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{0, 1, 2, 3\}$. Décrire les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \times B$.
2. On note $A = [1, 3]$ et $B =]2, 4]$. Déterminer $A \cap B$ et $A \cup B$.
3. Déterminer $[3, 8[\cap \mathbb{Z}$, $[-3, 2[\cap \mathbb{N}$ et $]0, 1[\cap \mathbb{Z}$.
4. Déterminer le complémentaire dans $\mathbb{R}$ des parties $]-\infty, 0]$ et $[1, 2[$.
5. Déterminer $]-2, 3] \setminus \mathbb{Z}$, $]-2, 3] \setminus [0, 4]$ et $]-2, 3] \setminus [-4, 4]$.

Exercice 2.

1. Écrire l'ensemble des entiers naturels pairs en extension puis en compréhension.
2. Écrire les ensembles suivants en extension.
   (a) $\{\ n \in \mathbb{N} \mid n \leq 2\ \}$;
   (b) $\{\ n \in \mathbb{N} \mid n < 1\ \}$;
   (c) $\{\ n \in \mathbb{N} \mid n \leq 1$ et n est divisible par $2\ \}$;
   (d) $\{\ n \in \mathbb{N} \mid \forall m \in \mathbb{N}, n \leq m\ \}$;
   (e) $\{\ n \in \mathbb{N} \mid \forall m \in \mathbb{N}, n < m\ \}$;
   (f) $\{\ n \in \mathbb{N} \mid n$ divise 12 ou n divise $55\ \}$;
   (g) $\{\ n \in \mathbb{N} \mid n$ ne divise pas 12 et $n \leq 7\ \}$.

Exercice 3. Décider si les ensembles suivants sont vides.

1. $\left\{\ x \in \mathbb{R}\ \middle|\ x^2 - 3x \geq 2\ \right\}$;
2. $\left\{\ x \in \mathbb{R}_-\ \middle|\ \dfrac{x+1}{2x-1} > 4\ \right\}$;
3. $\left\{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\ \middle|\ x^2 - 3xy + 4y^2 = -1\ \right\}$;
4. $\left\{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\ \middle|\ x^2 - 3xy + 4y^2 = 4\ \right\}$;
5. $\{\ (x, y) \in [0, 5] \times [0, 3] \mid 2x - 5y - 10 \geq 0\ \}$.

Exercice 4. Soit E un ensemble et $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$.

1. Montrer $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$ et
   $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.
2. Montrer l'équivalence des propositions :
   (a) $A \subset B$;
   (b) $A \cap B = A$;
   (c) $A \cup B = B$;
   (d) $A \setminus B = \emptyset$.
3. Montrer l'équivalence des propositions :
   (a) $A \cup B = A \cap C$;
   (b) $B \subset A \subset C$.
4. Montrer les implications

$$(A \cap B = A \cap C \text{ et } B \setminus A = C \setminus A) \implies B = C.$$

$$(A \cup B \subset A \cup C \text{ et } A \cap B \subset A \cap C) \implies B \subset C\ .$$

Exercice 5. Soit f l'application de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ dans lui-même définie par $f(1) = 4$, $f(2) = 1$, $f(3) = 2$, $f(4) = 2$. Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque $A = \{2\}$, $A = \{1, 2\}$, $A = \{3\}$.

Exercice 6. Décrire les ensembles qui suivent.

1. $\tan(\{0\})$;
2. $\sin^{-1}(\{2\})$;
3. $\cos^{-1}([0, 1])$;
4. $\left(\cos_{|[3,7]}\right)^{-1}([0, 1])$;
5. $\left(\cos_{|[0,\pi]}\right)^{-1}([0, 1])$;
6. $f^{-1}([0, 1])$ pour $f ; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$;
7. $f^{-1}([0, 1])$ pour $f : \left[-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$;
8. $f^{-1}([0, 1])$ pour $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$;
9. $\sqrt{\cdot}\,([0, 1])$;
10. $f^{-1}([-1, 1[\cup \{2\})$ et $f([0, 1]^3)$ pour $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto y$;
11. $|\cdot|([-2, -1] \cup [2, 4[)$;
12. $\left(|\cdot|_{|[-8,7]}\right)^{-1}([2, 3])$;
13. $|\cdot|^{-1}(\{1\})$.

Surjective. Injective. Bijective...

Exercice 7. Décider si les paires de fonctions qui suivent sont égales.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (x^2 + 2x + 1)(x - 1)$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (x + 1)(x^2 - 1)$;
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x)$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(x)$;
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + 1$ et $g : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$;
4. $f : \{\, x \in \mathbb{R} \,|\, |x - 2| < \frac{1}{2}|x + 3| \,\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$ et $g :]\frac{1}{3}, 7[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$;
5. $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (\sqrt{x})^2$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$.

Exercice 8. Étudier l'injectivité et la surjectivité des applications qui suivent. Lorsqu'elles sont bijectives, donner leur inverse.

1. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x)$;
2. $[\pi, 2\pi] \to [-1, 1]$, $x \mapsto \sin(x)$;
3. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$;
4. $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$;
5. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} -\ln x & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases}$;
6. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases}$;
7. $\{0, 1, 2, 3\} \to \{1, 7, 9, 11\}$, $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 11 & \text{si } x = 1 \\ 7 & \text{si } x = 2 \\ 9 & \text{si } x = 3 \end{cases}$;
8. $\{0, 1, 2\} \to \{-1, 0, 1\}$, $x \mapsto -(x - 1)$;
9. $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(0)$.

Exercice 9.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \{0\}$. Montrer que f est surjective mais pas injective.
2. Soit E un ensemble, $n \in \mathbb{N}^\star$, $(x_1, \cdots, x_n) \in E^n$ et $f : \{\, x_i \,|\, i \in [\![1, n]\!] \,\} \to \mathbb{R}$.
   Montrer que f n'est pas surjective.

Exercice 10. Soit E, F et G trois ensembles non vides. Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$.

1. On suppose $g \circ f$ injective. Montrer que f est injective et que g l'est aussi si f est surjective.
2. On suppose $g \circ f$ surjective. Montrer que g est surjective et que f l'est aussi si g est injective.

Exercice 11. Soit E, F et G trois ensembles non vides. Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

1. Montrer que f est injective si et seulement s'il existe $g \in \mathcal{F}(F, E)$ tel que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement s'il existe $g \in \mathcal{F}(F, E)$ tel que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.
3. On considère maintenant $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $x \mapsto (\max(x, 0), \max(-x, 0))$.
   (a) Montrer que f est injective et donner $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tel que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.
   (b) Quelle est l'image de f ?

Exercice 12. Soit E un ensemble non vide et $f : E \to \mathcal{P}(E)$.
Étudier la surjectivité de f en considérant $A = \{x \in E \,|\, x \notin f(x)\}$.

Exercice 13. Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \to F$.

1. Soit $B \subset F$.
   (a) Montrer que $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$.
   (b) À quelle condition a-t-on $f(f^{-1}(B)) = B$?
2. Montrer que f est surjective si et seulement si, pour tout $B \in \mathcal{P}(F)$, $f(f^{-1}(B)) = B$.
3. Soit $A \subset E$.
   (a) Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$.
   (b) Que peut-on dire si $f_{|\,f^{-1}(f(A))}$ est injective ?
4. Montrer que f est injective si et seulement si, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $f^{-1}(f(A)) = A$.

Exercice 14. Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \to F$.

1. Soit I un ensemble et $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}(E)^I$. Montrer que
$$f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i) \quad \text{et} \quad f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i) \ .$$
2. Montrer que f est injective si et seulement si, pour tout ensemble I et toute famille $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}(E)^I$, on a
$$f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f(A_i) \ .$$
3. Soit I un ensemble et $(B_i)_{i\in I} \in \mathcal{P}(F)^I$. Montrer que
$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i) \quad \text{et} \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i) \ .$$