Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2013-2014

Math I Algèbre - Prépa 1ère année. Groupes P3 et P4

Feuille d'exercices n° 1

LOGIQUE ET RAISONNEMENT

Exercice 1.

1.**Vrai-faux.** Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $(6 < \frac{25}{4}) \Rightarrow (\sqrt{6} < \frac{5}{2})$.
2. $(2 = 3) \Rightarrow$ (4 est un nombre pair).
3. $(2 = 3) \Rightarrow (3 = 4)$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}$, $((x \leq 0) \Rightarrow (x - 1 < 0))$.
5. Pour tout réel x, on a $x \leq 0$ donc $x - 1 < 0$.

1bis. **Analyse-synthèse.**

1. Déterminer les réels x tels que $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$.
2. Déterminer les réels x strictement positifs tels que $x^{(x^x)} = (x^x)^x$.

Exercice 2.

1. Soit P, Q et R trois propositions. Donner la négation des propositions qui suivent.
   (a) $(P \text{ et } Q) \Longrightarrow R$.
   (b) P et (non(Q) ou R).
2. Montrer que les propositions qui suivent sont fausses.
   (a) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(xy \neq 0 \text{ et } x \leq y) \Longrightarrow \left(\frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}\right)$.
   (b) $\exists x \in \mathbb{R}, \Big((x \leq 0) \text{ et } \big((\sqrt{x^2} \neq -x) \text{ ou } ((x+1)^2 > x^2 + 1)\big)\Big)$.

Exercice 3.

1. **Contraposée.** Montrer que, pour toutes propositions P et Q,
$$(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow (\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)).$$
2. Montrer que, pour tous réels x et y, $(x \neq y) \Longrightarrow ((x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1))$.
3. Soit n un entier naturel. Montrer que si n^2 est impair, alors n est impair.

Exercice 4.

1. Montrer la **transitivité** de l'implication, c'est-à-dire que, pour toutes propositions P, Q et R,

$$((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)) \Longrightarrow (P \Rightarrow R)\,.$$

2. (a) Montrer que, pour tout réel x, $(x^2 - 5x + 6 \leq 0) \Longrightarrow (2 \leq x \leq 3)$.
   (b) Montrer que, pour tout réel x, $(x^2 - 5x + 6 \leq 0) \Longrightarrow ((x-1)(10-x^2) \geq 0)$.
3. Soit P, Q et R trois propositions. Démontrer que

$$(P \Leftrightarrow Q) \text{ et } (Q \Leftrightarrow R) \text{ et } (R \Leftrightarrow P)$$

équivaut à

$$(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R) \text{ et } (R \Rightarrow P).$$

4. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que sont équivalents :
   (a) $\forall t \in \mathbb{R},\ x_0^2 + y_0^2 \leq (t - x_0)^2 + (-t - y_0)^2$;
   (b) $x_0 - y_0 = 0$;
   (c) $\forall t \in \mathbb{R},\ x_0\, t + y_0\,(-t) \leq 0$.

Exercice 5.

1. **Absurde.** Montrer que, pour toutes propositions P et Q,

$$(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow \text{non}\,(P \text{ et } \text{non}(Q))\,.$$

2. Montrer que, pour tout réel x, $\big(-x^4 + x^3 + x - 11 \leq 0\big) \Rightarrow \big(-x^4 + x^3 - 9 < 0\big)$.
3. Soit $\mathcal{P} = \{2k;\ k \in \mathbb{Z}\}$ et $\mathcal{I} = \{2k+1;\ k \in \mathbb{Z}\}$ les ensembles formés respectivement des entiers pairs et impairs. Montrer que $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \emptyset$.

Exercice 6.

1. Montrer que, pour toutes propositions P, Q et R,

$$(P \Rightarrow (Q \text{ ou } R)) \Longleftrightarrow ((P \text{ et } \text{non}(Q)) \Rightarrow R)\,.$$

2. Montrer que, pour tout réel x, $\big(x^3 + x^2 - x - 1 > 0\big) \Rightarrow \big((x \leq -1) \text{ ou } (x^4 > 1)\big)$.

Exercice 7.

1. Soit x et y deux nombres réels. Nier la proposition

$$(x = 2) \text{ et } ((x + y = 5) \text{ ou } (y \geq 3))\,.$$

2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nier

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in \mathbb{R}, ((|x - y| < \eta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| < \varepsilon)).$$

3. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de telles fonctions. Nier

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, ((n \geq N) \Rightarrow (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)).$$

Exercice 8. Compléter, lorsque c'est possible, avec $\forall$ ou $\exists$ pour obtenir les énoncés vrais les plus forts.

1. $\ldots\ x \in \mathbb{R},\ (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$.
2. $\ldots\ x \in \mathbb{R},\ x^2 + 3x + 2 = 0$.
3. $\ldots\ x \in \mathbb{R},\ 2x + 1 = 0$.
4. $\ldots\ x \in \mathbb{N},\ x \leq \pi$.
5. $\ldots\ x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2x + 3 = 0$.
6. $\ldots\ x \in \emptyset,\ 2 = 3$.

Exercice 9. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Lorsqu'elles sont fausses, énoncer leur négation.

1. $\exists x \in \mathbb{N},\ x^2 > 7$.
2. $\forall x \in \mathbb{N},\ x^2 > 7$.
3. $\forall x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N},\ y > x^2$.
4. $\exists y \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{N},\ y > x^2$.
5. $\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2,\ ((x \leq y) \Leftrightarrow (x^2 \leq y^2))$.
6. $\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2,\ ((xy \leq x^2) \Rightarrow (y \leq x))$

Exercice 10. On note $A = [0,1]$. Examiner les propositions suivantes. Lorsqu'elles sont vraies, en donner une démonstration ; sinon, proposer un contre-exemple.

1. $\forall x \in A,\ \forall y \in A,\ (x+y) \in A$.
2. $\forall x \in A,\ \exists y \in A,\ (x+y) \in A$.
3. $\exists x \in A,\ \forall y \in A,\ (x+y) \in A$.

Exercice 11. Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des étudiants de l'université Lyon 1, $\mathcal{S}$ l'ensemble des jours de la semaine et, pour tout étudiant x, $h_j(x)$ son heure de réveil le jour j.

1. Écrire avec des symboles mathématiques la proposition : « Tout étudiant de l'université Lyon 1 se réveille au moins un jour de la semaine avant 8h ».
2. Écrire la négation de cette proposition avec des symboles mathématiques puis l'énoncer en français.

Exercice 12. On considère la proposition : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}_+, \forall z \in \mathbb{R}_+, ((z \leq y) \Rightarrow (z^2 \leq x^2))$.
L'écrire en français puis décider sa véracité.

Exercice 13. Récurrence.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 4$, on a $n^2 \leq 2^n$.
2. Montrer que pour toute fonction $j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $j(n) \geq n$.
3. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite réelle déterminée par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n + 1$.
4. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ pour tout $n \geq 0$. Donner une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 14.

1. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
2. Calculer $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$.
3. Montrer que $\exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ x^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$.
4. Montrer que $\exists (x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2,\ x^y \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 15.

1. Soient x et y deux réels distincts de 1. Montrer que si $x \neq y$, alors $\dfrac{1}{x-1} \neq \dfrac{1}{y-1}$.
2. Montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.
3. Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 16. **Pythagore réciproque.** On admet le théorème de Pythagore "direct" :
Si ABC est un triangle rectangle avec l'angle droit en A, alors $|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$.
Prouver la réciproque suivante :
Si dans un triangle ABC on a $|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$ alors le triangle ABC est rectangle en A.

Exercice 17. Démontrer que la somme $1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$ des n premiers naturels non nuls est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$ en donnant une preuve directe et aussi une preuve par réccurence.

Exercice 18. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'entier $10^n - 1$ est divisible par 9.

Exercice 19. Montrer par réccurence que si $a \in]0, 1[$, alors $1 - na < (1-a)^n < 1/(1+na)$.

Exercice 20. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ établir l'inégalité : $|\sin(n\alpha)| \leq n\,|\sin\alpha|$ Indication : utiliser la formule $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Exercice 21. On définit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $A_n = 3^{2n+2} - 2^{n+1}$.

1. Calculer $A_{n+1} - 2A_n$.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, A_n est divisible par 7.

Exercice 22. Trouver une faute dans le raisonnement :

> On "montre" par récurrence que $2^n = (-1)^n$ pour tout n comme suit. On initialise avec n=0.
> Hérédité : les deux suites sont solutions de $u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1}$. Conclusion : $2^n = (-1)^n$.

Exercice 23. Soit $E_1, E_2, ..., E_n$ n ensembles distincts deux à deux. Montrer qu'au moins l'un des ensembles ne contient aucun autre.

Exercice 24. Soit A une partie de $[[1; 2n]]$ de cardinal superieur ou égal à $n+1$. On peut trouver dans A deux éléments p et q tels que p divise q.