Université Claude Bernard - Lyon 1 | Automne 2015

Math II - PMI/CCP | Durée : 1 heure et 30 minutes

Problème - Devoir numéro 1

Les calculatrices ne sont pas autorisées

Quelques rappels ou mises au point :

* Dans ce problème, toutes les suites sont indexées par $\mathbf{N}$. La notation (a_n) est ainsi une abréviation pour $(a_n)_{n\geq 0}$.

* Soit q un réel . Une suite de réels (u_n) est dite **géométrique de raison** q lorsqu'il existe un réel λ tel que pour tout $n \geq 0$, $u_n = \lambda q^n$. (Par convention dans ce problème, $0^0 = 1$.)

* La **somme** de deux suites de réels (u_n) et (v_n) est la suite (w_n) définie par : pour tout entier $n \geq 0$, $w_n = u_n + v_n$.

Des notations

Pour tout a réel, on note :

$$\mathcal{L}(a) = \{(u_n) \mid \forall n \geq 0, u_{n+1} + a u_n = 0\}.$$

On note ensuite : $\mathcal{L}_1 = \{(u_n) \mid \exists a \in \mathbf{R}, (u_n) \in \mathcal{L}(a)\}$.

Pour tous a, b réels, on note :

$$\mathcal{L}(a,b) = \{(u_n) \mid \forall n \geq 0, u_{n+2} + a u_{n+1} + b u_n = 0\}.$$

On note ensuite : $\mathcal{L}_2 = \{(u_n) \mid \exists a, b \in \mathbf{R}, (u_n) \in \mathcal{L}(a,b)\}$.

L'ensemble $\mathcal{L}_1$

1) a) Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. Montrer que (u_n) est élément de $\mathcal{L}(-q)$.

b) Soit q un réel et (v_n) une suite qui est élément de $\mathcal{L}(-q)$. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, on a : $v_n = v_0 q^n$.

c) Montrer que $\mathcal{L}_1$ est égal à l'ensemble des suites géométriques.

2) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par $u_n = n+1$. Montrer que cette suite n'est pas élément de $\mathcal{L}_1$.

3) On note :

$$\mathcal{M} = \{(u_n) \mid \forall n \geq 0, \exists a \in \mathbf{R}, u_{n+1} + a u_n = 0\}.$$

A-t-on l'inclusion $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}_1$? A-t-on l'inclusion $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{M}$? Donner une description raisonnablement simple des suites qui sont éléments de $\mathcal{M}$.

Les ensembles $\mathcal{L}(a,b)$: un exemple

4) On note (u_n), (v_n) et (w_n) les suites respectivement définies par : pour tout $n \geq 0$, $u_n = -2^n$, $v_n = (-2)^n$ et $w_n = 7 \times 3^n$. Lesquelles de ces trois suites sont-elles des éléments de $\mathcal{L}(-5, 6)$?

5) Soit λ et μ deux réels, et soit (u_n) la suite définie par : pour tout $n \geq 0$, $u_n = \lambda 2^n + \mu 3^n$. Montrer que (u_n) est un élément de $\mathcal{L}(-5, 6)$.

6) Soit (v_n) une suite qui appartient à $\mathcal{L}(-5, 6)$.

a) Montrer qu'on peut choisir deux réels α et β tels que :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = v_0 \\ 2\alpha + 3\beta = v_1 \end{cases}$$

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $v_n = \alpha 2^n + \beta 3^n$.

Un autre exemple d'élément de $\mathcal{L}_2$

Parce que c'est le premier devoir, on rappelle les formules suivantes, valables pour tous réels α et β :

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \text{ et } \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

(On ne sera pas si bon dans l'avenir...)

7) Soit θ un réel ; on suppose que pour tout entier relatif k, $\theta \neq k\pi$.
Pour tout $n \geq 0$, on note $s_n = \sin(n\theta)$ et $c_n = \cos(n\theta)$.

a) Montrer qu'il existe un et un seul couple de réels (a, b) pour lequel :

$$\begin{cases} s_2 = & as_1 + bs_0 \\ c_2 = & ac_1 + bc_0 \end{cases}$$

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $s_{n+2} = as_{n+1} + bs_n$ et $c_{n+2} = ac_{n+1} + bc_n$.

c) En déduire que (s_n) et (c_n) sont des éléments de $\mathcal{L}_2$.

Quelques observations complémentaires au sujet de $\mathcal{L}_2$

8) a) Soit q, r deux réels non nuls et soit (u_n) et (v_n) deux suites de réels. En s'inspirant du calcul fait à la question 5, montrer que si $(u_n) \in \mathcal{L}(q)$ et $(v_n) \in \mathcal{L}(r)$, alors $(u_n) + (v_n) \in \mathcal{L}(q + r, qr)$.

b) Montrer que la somme de deux éléments de $\mathcal{L}_1$ est un élément de $\mathcal{L}_2$.

9) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par $u_n = n + 1$. Montrer que cette suite est élément de $\mathcal{L}_2$.

Encore des notations (qui généralisent celles introduites en début de problème)

Pour tout entier $k \geq 1$ et tout k-uplet de réels $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$, on notera :

$$\mathcal{L}(c_1, c_2, \ldots, c_k) = \{(u_n) \mid \forall n \geq 0, u_{n+k} + c_1 u_{n+k-1} + c_2 u_{n+k-2} + \cdots + c_{k-1} u_{n+1} + c_k u_n = 0\}.$$

Pour tout entier $k \geq 1$, on notera :

$$\mathcal{L}_k = \{(u_n) \mid \exists (c_1, \ldots, c_k) \in \mathbf{R}^k, \forall n \geq 0, u_{n+k} + c_1 u_{n+k-1} + \ldots + c_k u_n = 0\}.$$

Une question facile qui sert plus loin

10) Soit $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ un k-uplet de réels, et soit (u_n) et (v_n) deux suites toutes deux éléments de $\mathcal{L}(c_1, c_2, \ldots, c_k)$. Montrer que leur somme (w_n) est elle aussi un élément de $\mathcal{L}(c_1, c_2, \ldots, c_k)$.

Suites polynomiales

11) On dira qu'une suite (u_n) est **polynomiale de degré inférieur ou égal à 2** lorsqu'il existe des réels a, b et c tels que pour tout $n \geq 0$ on ait : $u_n = an^2 + bn + c$.

a) Montrer que toute suite polynomiale de degré inférieur ou égal à 2 appartient à $\mathcal{L}(-3, 3, -1)$.

b) Soit (v_n) un élément de $\mathcal{L}(-3, 3, -1)$. On note (x_n) la suite définie pour tout $n \geq 0$ par :

$$x_n = v_n - \frac{(n-1)(n-2)}{2} v_0 + n(n-2) v_1 - \frac{n(n-1)}{2} v_2.$$

Montrer que (x_n) est élément de $\mathcal{L}(-3, 3, -1)$, puis montrer que pour tout $n \geq 0$, $x_n = 0$.

c) Conclure que $\mathcal{L}(-3, 3, -1)$ est égal à l'ensemble des suites polynomiales de degré inférieur ou égal à 2.

12) Soit $l \geq 2$ un entier. On dira qu'une suite (u_n) est **polynomiale de degré inférieur ou égal à** l lorsqu'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_l$ tels que pour tout $n \geq 0$ on ait : $u_n = a_l n^l + \cdots + a_1 n + a_0$. Pour chaque $k \geq 3$ on note :

$$\mathcal{P}_k = \mathcal{L}(-\binom{k}{1}, \binom{k}{2}, -\binom{k}{3}, \cdots, (-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}, (-1)^k).$$

a) Vérifier que $\mathcal{P}_3 = \mathcal{L}(-3, 3, -1)$ puis expliciter de la même façon la définition de $\mathcal{P}_4$.

b) Soit (u_n) une suite de réels. On note (v_n) la suite définie pour tout $n \geq 0$ par : $v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que $(u_n) \in \mathcal{P}_4 \iff (v_n) \in \mathcal{P}_3$.

c) Déduire du b) ci-dessus que toute suite polynomiale de degré inférieur ou égal à 3 est élément de $\mathcal{P}_4$.

d) En s'inspirant des calculs effectués au b) et au c), montrer que pour tout $k \geq 3$, toute suite polynomiale de degré inférieur ou égal à $k-1$ est élément de $\mathcal{P}_k$.

Sommes d'éléments de $\mathcal{L}_k$

13) Soit a, b, c et d quatre réels.

a) Soit (u_n) un élément de $\mathcal{L}(a, b)$ et soit $n \geq 0$ un entier. Calculer le réel

$$\begin{array}{lllllllll} u_{n+4}+ & a\,u_{n+3} & + & b\,u_{n+2} & + & & & & \\ & c\,u_{n+3} & + & ca\,u_{n+2} & + & cb\,u_{n+1} & + & & \\ & & & d\,u_{n+2} & + & da\,u_{n+1} & + & db\,u_n. \end{array}$$

b) En déduire que :

$$\mathcal{L}(a, b) \subset \mathcal{L}(a + c, b + ac + d, bc + ad, bd).$$

14) Déduire de la question précédente que la somme de deux éléments de $\mathcal{L}_2$ est un élément de $\mathcal{L}_4$.

15) Généraliser ce qu'on vient de faire : en imaginant un calcul analogue, montrer que pour tous entiers k, l supérieurs ou égaux à 1, la somme d'un élément de $\mathcal{L}_k$ et d'un élément de $\mathcal{L}_l$ est un élément de $\mathcal{L}_{k+l}$.

Produits d'éléments de $\mathcal{L}_2$

16) Montrer que le produit de deux éléments de $\mathcal{L}_2$ est un élément de $\mathcal{L}_4$.