La méthode du pivot.

Les problèmes d'algèbre linéaire se ramenent souvent à l'étude d'un système d'équations linéaires. La méthode du pivot (ou méthode d'élimination de Gauss) fournit un algorithme simple et pratique pour résoudre ce type de problèmes.

.

1. Calcul du déterminant.

On a une matrice carrée

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}.......a_{1n} \\ .... \\ a_{n1}.......a_{nn} \end{pmatrix}$$

On va faire des *opérations élémentaires* sur les lignes de la matrice A:

1) Echanger deux lignes: le déterminant change de signe.

2) Ajouter à une ligne un multiple d'une autre ligne: le déterminant ne change pas.

Etape 1: Si la première colonne de A est nulle, dét$A = 0$, fin. Sinon, quitte à échanger deux lignes, on peut supposer que $a_{11} \neq 0$.

Etape 2: On modifie les lignes $\mathbf{l_2}, ..., \mathbf{l_n}$ de A: $\mathbf{l_i} \rightarrow \mathbf{l_i} - \frac{\mathbf{a_{i1}}}{\mathbf{a_{11}}}\mathbf{l_1}$. Dans la nouvelle matrice A' la première colonne contient un seul élément non-nul: a_{11}. Le développement selon la première colonne donne $\pm detA = detA' = a_{11} detA_1$, où A_1 s'obtient de A' en supprimant la première ligne et la première colonne. Après cela on revient à l'étape 1 pour la matrice A_1 (récurrence).

A la fin de cette procédure (si det $A \neq 0$) on arrive à une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont des "pivots".

.

2. Système d'équations linéaires.

On considère un système (S) d'équations linéaires:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + ... + a_{1p}x_p = b_1 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + ... + a_{np}x_p = b_n \end{pmatrix}$$

.

En termes matriciels le système (S) s'écrit $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en notant

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}.......a_{1p} \\ .... \\ a_{n1}.......a_{np} \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ .. \\ x_p \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ .. \\ b_n \end{pmatrix}.$$

.

Remarque: Soit $\mathbf{a_1}, ..., \mathbf{a_p} \in K^n$ les colonnes de A. Le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ s'écrit comme $x_1\mathbf{a_1} + ... + x_p\mathbf{a_p} = \mathbf{b}$. Donc résoudre le système (S) est équivalent au problème suivant: étant donné les vecteurs $\mathbf{a_1}, ..., \mathbf{a_p}$ et $\mathbf{b}$

déterminer si $\mathbf{b}$ est une combinaison linéaire des $\mathbf{a_1}, ..., \mathbf{a_p}$ et si oui, calculer les coefficients de telles combinaisons linéaires.

En particulier, si $p = n$ et $\mathbf{a_1}, ..., \mathbf{a_p}$ est une base, il s'agit de développer le vecteur $\mathbf{b}$ suivant cette base.

Opérations élémentaires sur les équations (ou sur les lignes de la matrice $(A; \mathbf{b})$):

1) Echanger deux équations.

2) Ajouter à une équation un multiple d'une autre équation.

3) Multiplier une équation par un scalaire non-nul.

Evidemment, les opérations élémentaires transforment le système en système équivalent.

Etape 1: Soit $\mathbf{a_j}$ la première colonne de A non-nulle (donc $a_{ik} = 0$ si $k < j$). Quitte à échanger deux lignes, on peut supposer que $a_{1j} \neq 0$.

Etape 2: On modifie les lignes $\mathbf{l_2}, ..., \mathbf{l_n}$ de $(A; \mathbf{b})$: $\mathbf{l_i} \to \mathbf{l_i} - \frac{\mathbf{a_{ij}}}{\mathbf{a_{1j}}}\mathbf{l_1}$.

Ensuite dans le système obtenu on supprime la première ligne et les j premières colonnes - ce qui donne la matrice $(A_1; \mathbf{b_1})$. Après cela on revient à l'étape 1 pour le système de matrice $(A_1; \mathbf{b_1})$ (récurrence).

A la fin on obtient une matrice **échelonnée** (ou "en escalier") dont les lignes commencent par un nombre de zéros strictement croissant à mesure que l'indice augmente.

Les premiers coefficients non-nuls des lignes non-nulles s'appellent **pivots**.

En permutant les colonnes si nécessaire, ce qui revient à changer la numérotation des inconnues $x_1, ...x_p$, on peut placer le $i-$ème pivot dans la $i-$ème colonne de façon à ce que la i-ème ligne commence par exactement $i - 1$ zéros.

On peut aller plus loin: on applique l'étape 2 en commençant par le dernier pivot et en remontant dans le système vers la permière ligne. De cette façon on peut annuler tous les coefficients au dessus des pivots. Finalement, en divisant par les pivots on peut faire tous les pivots égals à 1 (on aurait pu le faire dès le début).

Le système qui résulte s'écrit en termes des blocs:

$$\begin{pmatrix} I_r; B \\ \\ 0\ ; 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x_1'} \\ \\ \mathbf{x_2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b_1'} \\ \\ \mathbf{b_2'} \end{pmatrix}$$

Ici I_r est la matrice identité de rang r, B est une matrice $r \times (p - r)$, $\mathbf{x_1'}$ $= (x_1', ..., x_r')$, $\mathbf{x_2'} = (x_{r+1}', ..., x_n')$, $\mathbf{b_1'} = (b_1', ..., b_r')$, $\mathbf{b_2'} = (b_{r+1}', ..., b_n')$.

Le système s'écrit: $\mathbf{x_1'}$+B$\mathbf{x_2'} = \mathbf{b_1'}$, $0 = \mathbf{b_2'}$.

L'équation $\mathbf{b_2'} = \mathbf{0}$ est la *condition de compatibilité*, nécessaire et suffisante pour qu'une solution existe. Si elle est satisfaite, les solutions sont données par

$\mathbf{x'_1} = -\mathrm{B}\mathbf{x'_2} + \mathbf{b'_1}$,

où les variables $\mathbf{x'_2}$ $=(x'_{r+1}, ..., x'_n)$ peuvent être choisis arbitrairement (variables libres) et ce choix détermine $(x'_1, ..., x'_r)$ (inconnues principales).

.

3. Rang d'une matrice, rang d'une famille de vecteurs.

Soit $\mathbf{l_1}, ..., \mathbf{l_n} \in K^p$ les lignes de la matrice A et $\mathbf{a_1}, ..., \mathbf{a_p} \in K^n$ ses colonnes.

On voie facilement que:

1) Les opérations élémentaires sur les lignes de A ne changent pas le sous-espace $Vect(\mathbf{l_1}, ..., \mathbf{l_n})$ donc laissent le rang de la famille $(\mathbf{l_1}, ..., \mathbf{l_n})$ inchangé. Ces opérations agissent sur les colonnes de A comme des changements élémentaires de base dans K^n, donc laissent le rang de la famille $(\mathbf{a_1}, ..., \mathbf{a_p})$ inchangé.

2) Symétriquement, les opérations élémentaires sur les colonnes de A ne changent pas $Vect(\mathbf{a_1}, ..., \mathbf{a_p})$ donc laissent le rang de la famille $(\mathbf{a_1}, ..., \mathbf{a_p})$ inchangé. Ces opérations agissent sur les lignes de A comme des changements élémentaires de base dans K^p, donc laissent le rang de la famille $(\mathbf{l_1}, ..., \mathbf{l_n})$ inchangé.

Donc le rang de la famille des lignes ainsi que celui des colonnes est inchangé en cours de l'application de la méthode du pivot. Pour la matrice finale

$$\begin{pmatrix} I_r; B \\ \\ 0\ ; 0 \end{pmatrix}$$

le rang de la famille des lignes ainsi que celui des colonnes est évidemment égal à r, le nombre de pivots.

On peut en conclure que

1) Pour toute matrice le rang de la famille des lignes est égal à celui des colonnes.

2) Les lignes contenant les pivots forment une base de $Vect(\mathbf{l_1}, ..., \mathbf{l_n})$.

3) Les colonnes contenant les pivots forment une base de $Vect(\mathbf{a_1}, ..., \mathbf{a_p})$.

.

4. Matrice inverse.

Matrices élémentaires. Chaque opération élémentaire sur les lignes de A s'exprime comme la multiplication de A à gauche par une matrice "élémentaire" inversible T: $A \to TA$ (et pour le second membre du système on a $\mathbf{b} \to \mathbf{Tb}$). [Ecrire les matrices T.]

Pour décider si la matrice A est inversible et calculer sa matrice inverse, on procède comme dans le calcul du déterminant et on arrive à une matrice triangulaire (supérieure); Ensuite on continue: on applique l'étape 2 en commençant par le dernier pivot et en remontant dans la matrice vers la permière ligne. De cette façon on peut annuler tous les coefficients au dessus des pivots. Finalement, en divisant par les pivots on peut faire tous les pivots égals à 1.

En termes de la multiplication par les matrices élémentaires on a
$T_k ... T_1 A = I_n$, donc $T_k ... T_1 = A^{-1}$ - la matrice inverse est calculée.
.

[Si on considère le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, après les transformations on obtient $\mathbf{x} = T_k ... T_1 \mathbf{b} = \mathbf{b}'$ ou $= A^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{b}'$. En prenant le second membre $\mathbf{b}$ avec les coefficients indéterminés et en calculant $\mathbf{b}'$ et fonction de $\mathbf{b}$, on récupère A^{-1}.]