Sixième Devoir Surveillé.

Suites, algèbre linéaire et polynômes

Vous devez apporter un *soin particulier* à la *précision des calculs* ainsi qu'à la rigueur et la concision des *arguments avancés.* Toute incohérence dans les résultats obtenus sera sanctionnée par la perte de points.

Vous devez mettre en évidence les résultats obtenus en les *encadrant.* De manière générale, vous devez faire un effort tout particulier à la présentation de votre copie.

Si au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-la sur sa copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons de vos prises d'initiative.

L'usage de la calculatrice et du rapporteur sont interdits. La présence du téléphone portable n'est pas tolérée.

Exercice d'algèbre linéaire.

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Donner la définition d'un sous-espace vectoriel F de E.
2. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ z - 2x = y\}$.
   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer deux vecteurs u et v de $\mathbb{R}^3$ tel que $F = \mathrm{Vect}(\{u, v\})$.
   (c) Soit $G = \{(\lambda, \lambda, 0),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
   (d) Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$. *(Au préalable, on rappelera bien ce que cette égalité signifie).*
3. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Donner la définition d'une application $\mathbb{K}$-linéaire de E vers F.
4. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
   (a) Donner la définition de $\mathrm{Ker}\, f$ et de $\mathrm{Im}\, f$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}\, f$ est un sous-espace vectoriel de E.
5. On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n et l'application f de E vers $\mathbb{R}$ définie pour tout $P \in E$ par
$$f(P(X)) = P(0).$$
   (a) Montrer que $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.
   (b) Déterminer $\mathrm{Ker}\, f$ et donner une famille finie de vecteurs de E qui engendre $\ker f$.
   (c) Déterminer $\mathrm{Im}\, f$.
   (d) L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

Problème 1. Étude d'une suite récurrente

Le but du problème est d'étudier la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k}.$$

1. ***Limite de la suite*** $(u_n)_n$

L'objectif de cette partie est de déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$

1. Montrer par récurrence que $u_n > 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1}^2 = u_n^2 + u_n.$$
3. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$.
   (a) Montrer que $f(x) = x \Leftrightarrow x = 0$;
   (b) Montrer que $f(x) > x$ pour tout $x > 0$.
4. En déduire que la suite $(u_n)_n$ est strictement croissante.
5. Conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. ***Une série d'équivalents***

L'objectif de cette partie est de donner plusieurs équivalents de suites définies à l'aide de la suite $(u_n)_n$. Les résultats obtenus seront employés dans la dernière partie.

1. Déduire de la question 5 (Partie 1) que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1 + \dfrac{1}{u_n}} = 1$.
2. En déduire que $u_{n+1} \sim u_n$.
3. Établir que $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \dfrac{1}{2}$.
4. En déduire que
$$\sqrt{1 + \frac{1}{u_n}} - 1 \sim \frac{1}{2\,u_n}.$$
5. En déduire que $\sqrt{1 + \dfrac{1}{u_n}} = 1 + \dfrac{1}{2\,u_n} + o(\dfrac{1}{u_n})$
6. Établir que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}$. Au passage, quel équivalent de $u_{n+1} - u_n$ en découle ?

3. ***Un équivalent simple de la suite*** $(u_n)_n$

Soient $(v_n)_n$ la suite de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $(S_n)_n$ celle de terme général $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} v_k$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $\varepsilon > 0$ fixé.
   (a) À l'aide de la question 6 (Partie 2), montrer qu'il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $k \geq n_\varepsilon$:
$$\left| v_k - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$
   (b) En déduire que pour tout entier $n \geq n_\epsilon$
$$|S_n - \frac{n}{2}| \leq \sum_{k=0}^{n_\varepsilon - 1} |v_k - \frac{1}{2}| + (n - n_\varepsilon)\,\frac{\varepsilon}{4}.$$
   (c) Montrer qu'il existe un entier $n'_\varepsilon \geq n_\varepsilon$ tel que pour tout entier $n \geq n'_\varepsilon$,
$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{n_\varepsilon - 1} |v_k - \frac{1}{2}|}{n} \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

(d) En déduire que pour tout entier $n \geq n'_\varepsilon$,

$$|S_n - \frac{n}{2}| \leq \varepsilon \, \frac{n}{2}.$$

2. Déterminer à l'aide de la question précédente un équivalent simple de S_n.
3. En remarquant que S_n est une somme télescopique, en déduire un équivalent simple de u_n.

Problème 2. Identité de Bézout des polynômes x^n et $(1-x)^n$

Étant donné un entier $n \geq 1$, on note $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n-1$. Le produit de deux polynômes $A(x) \in \mathbb{R}[x]$ et $B(x) \in \mathbb{R}[x]$ sera noté $A \cdot B$ dans toute la suite du problème.

Le but du problème est de déterminer et d'étudier l'ensemble des couples $(U_n(x), V_n(x))$ de polynômes vérifiant :

$$\begin{aligned} (d_n) \quad &: \quad U_n(x) \text{ et } V_n(x) \text{ appartiennent à } \mathbb{R}_{n-1}[x]\,; \\ (B_n) \quad &: \quad U_n(x) \cdot (1-x)^n + V_n(x) \cdot x^n = 1. \end{aligned}$$

Notations et résultats admis Etant donnés des entiers $m \geq 0$ et $k \geq 0$ avec $m \geq k$, on note $\binom{m}{k}$ le coefficient binomial égal à $\frac{m!}{k!(m-k)!}$.

Étant donnés $A(x) \in \mathbb{R}[x]$ et $B(x) \in \mathbb{R}[x]$, on rappelle que pour tout entier $m \geq 0$

$$(A(x) + B(x))^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A(x)^k \cdot B(x)^{m-k}. \tag{1}$$

Partie I - Question préliminaire

1. Soient $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ et $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$. Montrer que s'il existe des entiers strictement positifs m et n tels que

$$x^m \cdot P(x) = (1-x)^n \cdot Q(x),$$

alors x^m divise $Q(x)$ et $(1-x)^n$ divise $P(x)$.

On pourra faire référence au résultat de cette question dans la suite du problème.

Partie II - Détermination des couples $(U_n(x), V_n(x))$

1. Appliquer la formule (1) à $((1-x)+x)^{2\,n-1}$.
2. En appliquant le résultat de la question 1. aux cas particuliers $n = 1$; $n = 2$ et $n = 3$, donnez des couples $(U_1(x), V_1(x))$; $(U_2(x), V_2(x))$ et $(U_3(x), V_3(x))$ vérifiant (d_n) et (B_n) dans les cas $n = 1$; $n = 2$ et $n = 3$ respectivement.
3. Pour chacun des polynômes $U_1(x)$; $U_2(x)$ et $U_3(x)$ obtenus, déterminer les racines réelles. Lesquels sont irréductibles dans $\mathbb{R}[x]$? dans $\mathbb{C}[x]$?
4. Plus généralement, établir à l'aide de la question 1. l'existence pour tout entier $n \geq 1$, d'un couple $(U_n(x), V_n(x))$ vérifiant (d_n) et (B_n) [*On ne cherchera pas à calculer les coefficients des polynômes* $U_n(x)$ *et* $V_n(x)$].
5. Soient $A(x) \in \mathbb{R}[x]$ et $B(x) \in \mathbb{R}[x]$ vérifiant (B_n) à savoir

$$A(x) \cdot (1-x)^n + B(x) \cdot x^n = 1.$$

(a) Montrer que x^n divise $A(x) - U_n(x)$ et que $(1-x)^n$ divise $V_n(x) - B(x)$.

(b) En déduire qu'il existe $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ tel que

$$A(x) = Q(x) \cdot x^n + U_n(x) \quad \text{et} \quad B(x) = -Q(x) \cdot (1-x)^n + V_n(x).$$

(c) Conclure que le couple $(U_n(x), V_n(x))$ obtenu à la question 1, est le seul couple vérifiant à la fois (d_n) et (B_n).

6. On se propose de calculer $U_n(0)$; $U_n(1)$ et $U_n(\frac{1}{2})$.

(a) Déduire de (B_n) la valeur de $U_n(0)$.

(b) Calculer $U_n(1)$ à l'aide de la question 4.

(c) Montrer que le couple $(V_n(1-x), U_n(1-x))$ vérifie (d_n) et (B_n). En déduire que $V_n(x) = U_n(1-x)$ et la valeur de $U_n(\frac{1}{2})$.

Partie III - Une équation différentielle dont $U_n(x)$ est solution

On se propose de montrer que pour tout entier $n \geq 2$,

$$n\,U_n(x) - (1-x) \cdot U_n'(x) = n \binom{2\,n-1}{n} x^{n-1}, \tag{2}$$

et d'en déduire les coefficients de $U_n(x)$.

1. Montrer que le degré du polynôme $n\,U_n(x) - (1-x) \cdot U_n'(x)$ est inférieur ou égal à $n-1$.
2. En dérivant (B_n), montrer que x^{n-1} divise le polynôme $n\,U_n(x) - (1-x)\,U_n'(x)$.
3. En déduire que le polynôme $n\,U_n(x) - (1-x)\,U_n'(x)$ est de la forme $\alpha\,x^{n-1}$. Conclure que $U_n(x)$ vérifie (2) à l'aide de la question 6.b) (Partie II).
4. Déduire de l'équation (2) que les coefficients de $U_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\,x^k$ vérifient des relations de récurrence, puis calculer les coefficients de $U_n(x)$.
5. Établir de la question précédente que pour tout entier $n \geq 2$

$$\binom{2\,n-1}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k+n-1}{k}.$$