CPGEI Automne 2012

Suites

<u>Exercice 1</u> : Soit $a \in \mathbb{R}$. Etudier suivant les valeurs de a la nature de la suite (a^n).

<u>Exercice 2</u> : Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $v_n = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n$, n ∈ ℕ. Etudier suivant les valeurs de a la nature de la suite (v_n).

Application : Etudier les suites de terme général

$u_n = 0{,}1111111\ldots.1$ (n décimales) $u_n = 0{,}3333333\ldots3$ $u_n = 0{,}9999999\ldots9$

<u>Exercice 3</u> : Montrer, en utilisant la définition de la convergence , que la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{n}{n+1}$ converge vers 1.

<u>Exercice 4</u> : Montrer que si la suite (u_n) converge vers l alors la suite $(|u_n|)$ converge vers $|l|$. Réciproque ?

<u>Exercice 5</u> : Montrer que si (u_n) converge vers l_1 et (v_n) converge vers l_2 alors $(u_n + v_n)$ converge vers $l_1 + l_2$ et $(u_n v_n)$ converge vers $l_1 l_2$.

<u>Exercice 6</u> : Démontrer que :

* Toute suite de réels croissante et majorée converge vers sa borne supérieure.

* Toute suite de réels décroissante et minorée converge vers sa borne inférieure.

<u>Exercice 7</u> : Etudier les suites dont le terme général est :

$$u_n = \sqrt[n]{n} \;; \quad u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \;; \quad u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \qquad u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$$

<u>Exercice 8</u> : Etudier par encadrement la suite de terme général $u_n = \sum_{p=0}^{p=2n+1} \frac{n}{n^2+p}$.

<u>Exercice 9</u> : Soit $a \in \mathbb{R}$; Soit $u_n = \frac{a^n}{n!}$. Montrer que la suite $(|u_n|)$ est décroissante à partir d'un certain entier n_0 et en conclure que la suite (u_n) converge vers 0 , quelque soit a .

<u>Exercice 10</u> : Soit $u_0 \in [0, \frac{1}{5}]$ et par récurrence $u_{n+1} = {u_n}^2 + \frac{4}{25}$, n ∈ ℕ .

a- Montrer que tous les u_n sont compris entre 0 et $\frac{1}{5}$.
b- Montrer que la suite (u_n) est monotone, bornée, convergente et trouver sa limite.
c- Reprendre l'étude pour $u_0 \in]\frac{1}{5}, \frac{4}{5}[$, $u_0 = \frac{4}{5}$, $u_0 > \frac{4}{5}$, $u_0 < 0$.

<u>Exercice 11</u> : Soit $a \in R^+$. Soit $u_0 = 0$ et par recurrence $u_{n+1} = \sqrt{a + u_n}$ .Montrer que cette suite est définie. Montrer qu'elle est croissante, majorée par 1+ a et trouver sa limite.

Exercice 12 : On pose $u_0 = 1$ et par recurrence u_{n+1}= ln $(1 + u_n)$, n ∈ ℕ .Montrer que cette suite est définie, qu'elle est monotone et trouver sa limite.

Exercice 13 : Montrer qu'une suite (u_n) converge vers l si et seulement si les sous suites (u_{2n+1}) et (u_{2n}) convergent vers l.

Exercice 14 : Soit une suite (u_n) ; on suppose que (u_{2n}) converge vers l_1, (u_{2n+1}) converge vers l_2,

(u_{3n}) converge vers l_3.Montrer que $l_1 = l_2 = l_3$ et que (u_n) converge vers cette valeur commune.

Exercice 15 : On pose $u_0 = 1$ et par recurrence u_{n+1}= 1 + $\frac{2}{u_n}$. Calculer u_1, u_2, u_3.

Montrer que u_n > 1 pour tout n ∈ $\mathbb{N}^*$.

Montrer que la fonction f(x) = 1+ $\frac{2}{x}$ est décroissante sur [1,+∞[.Etudier les sous suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}):on montrera qu'elles sont monotones et que ∀ n, $u_{2n} < 2$, $u_{2n+1} > 2$. Conclure.

Exercice 16 : On pose : $u_0 = 0$ et par recurrence u_{n+1}= cos u_n .Montrer que : ∀ n ∈ ℕ , u_n ∈$[0,\frac{\pi}{2}]$.

Etudier les sous suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) puis conclure.

Exercice 17 : On pose : $u_0 = \frac{1}{2}$ et par recurrence u_{n+1}= (1- $u_n)^2$, n ∈ ℕ . Montrer que ∀n ∈ ℕ , u_n ∈[0,1].

Montrer que la fonction f(x) = $(1-x)^2$ est décroissante sur [0,1]. Etudier les sous suites (u_{2n}) et(u_{2n+1}) puis conclure.

Suites adjacentes

Exercice 18 : On pose $u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!}$; Montrer que ces 2 suites sont adjacentes et convergent vers une limite commune qui est un nombre irrationnel.

Exercice 19 : moyenne arithmético-géométrique : soient $a_0 > 0, b_0 > 0$ donnés et par récurrence

a_n=$\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}$, b_n=$\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ pour n≥ 1.Montrer que ∀$n \geq 1$, $a_n \leq b_n$ et que ces 2 suites sont adjacentes.

Exercice 20 : On donne 4 réels : a>b>0 et v_0>u_0 ; on pose par récurrence ∀$n \geq 1$:

u_n= $\frac{au_{n-1}+bv_{n-1}}{a+b}$, v_n= $\frac{bu_{n-1}+av_{n-1}}{a+b}$; Montrer que ces suites sont adjacentes et trouver leur limite commune à l'aide de u_n+v_n.

Exercice 21 : On donne $\alpha >0$, $\beta>0$, $u_0=2$, $v_0=1$ et on pose par récurrence $\forall n \geq 1$:

$u_n=\frac{\alpha u_{n-1}+\beta v_{n-1}}{\alpha+\beta}$, $v_n=\frac{\alpha u_n+\beta v_{n-1}}{\alpha+\beta}$

a-Montrer $\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2} \leq \frac{1}{4}$

b-pour $n \geq 1$ exprimer $u_n - v_n$ en fonction de $u_{n-1} - v_{n-1}$; en déduire que $u_n - v_n= (\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2})^n$.

c-pour $n \geq 1$ montrer que $v_n - v_{n-1}= \frac{\alpha}{\beta}\,(\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2})^n$.

d-montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

e-En déduire $\lim u_n = \lim v_n = 1+\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}$ (en exprimant v_n à l'aide de la question c).

Suite de Fibonacci

Exercice 22 : On pose $u_0=1$, $u_1=2$ et par récurrence $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$ pour tout n≥2.

a – Montrer que (u_n) tend vers $+\infty$.

b – Montrer $\forall n \in N \;\; {u_{n+1}}^2 - u_n u_{n+2} = (-1)^n$.

c – On pose $v_n=\frac{u_{n+1}}{u_n}$: déterminer $\lim_{n\to\infty} {v_n}^2 - v_n - 1$.

d – Calculer $v_{p+1} - v_p$ puis $v_{p+1} - v_{p-1}$. En déduire l'étude des sous suites (v_{2n}) et (v_{2n+1}).

e –Montrer que l'on peut en conclure $\lim v_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Suite de Césaro

Exercice 23 :Soit (u_n) une suite qui converge vers l ; montrer que la suite (v_n) définie par

$v_n = \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$ converge également vers l.

Suites de Cauchy

Exercice 24 : Montrer que la suite de terme général $u_n= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n}$ n'est pas une suite de Cauchy et qu'elle tend vers $+\infty$.

Exercice 25 : Soient $a_n= \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\cos k}{2^k}$ et $b_n= \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\sin k}{2^k}$: montrer que ce sont des suites de Cauchy et donc qu'elles convergent vers respectivement vers l_1 et l_2 dans R.

Montrer que la suite complexe (a_n+ib_n) converge dans $\mathbb{C}$, préciser sa limite et en déduire l_1 et l_2.

Remarque :

Par définition, une suite de nombres complexes (z_n) converge vers le complexe α+iβ si et seulement si $|z_n - (\alpha+i\beta)|$ tend vers 0 et ceci équivaut à ce que les suites réelles (Ré$z_n - \alpha$) et (Im$z_n - \beta$) tendent vers 0.

<u>Exercice 26</u> : On donne u_0 et u_1 et on définit par récurrence $u_{n+1}=\frac{3u_n+2u_{n-1}}{5}$ pour n≥1.

a- Montrer que cette suite est de Cauchy [on calculera $u_{n+1}- u_n$ en fonction de $u_1 - u_0$ puis $u_{n+p} - u_n$ en fonction de $u_1 - u_0$]
b- Exprimer u_n en fonction de n, u_0 et u_1 et en déduire la limite de la suite (u_n) .

<u>Exercice 27</u> : Soit f : $R \to R$ telle qu'il existe k, 0<k<1 ,qui vérifie :

$$\forall x \in R, \forall y \in R\ ,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

A partir de u_0 donné, on pose $u_{n+1}= f(u_n)$.

a- Montrer que (u_n) est une suite de Cauchy.
b- En déduire que l'équation $f(x) = x$ a au moins une solution.

<u>Exercice 28</u> : Soit (a_n) une suite bornée telle que $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} < a_n < 1$.

On pose $b_0=a_0$ et $b_n=\frac{b_{n-1}+a_n}{1+a_n b_{n-1}}$.

a – Montrer que $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $0 < b_n < 1$.

b – Montrer que (b_n) est une suite croissante et convergente.

c – Montrer que sa limite est 1 en utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass pour (a_n).