Feuille d'exercices numéro 9
Intégrales impropres

Exercice 9-1
Montrer la convergence et calculer la valeur des intégrales suivantes (dans la première, a est un paramètre strictement positif) :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-at}\,dt \qquad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} \qquad I_3 = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1+e^t}{e^{2t}-2e^t+1}\,dt \qquad I_4 = \int_0^{1/2} \ln\left(\frac{1}{1-3t+2t^2}\right) dt$$

$$I_5 = \int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(t^2+1)^2}\,dt \qquad I_6 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}\,dt \qquad I_7 = \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x^3}}\,dx$$

Exercice 9-2
Soit a et b deux paramètres réels. Discuter selon leurs valeurs la convergence de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^a(\ln t)^b}dt$. On pourra :
1) Lorsque $a=1$, calculer explicitement $\displaystyle\int_2^A \frac{1}{t(\ln t)^b}dt$ pour A réel destiné à tendre vers $+\infty$.
2) Lorsque $a \neq 1$, utiliser les fonctions de référence mentionnées en cours et le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives.

Exercice 9-3
Pour x réel, lorsque l'intégrale ci-dessous converge, on pose :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

Préciser le domaine de définition de cette fonction Γ. Montrer que pour tout x dans ce domaine, on a : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Calculer $\Gamma(n)$ pour tout $n \geq 1$ entier.

Exercice 9-4
Soit f une fonction continue de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$. On suppose que $f(t)$ admet une limite réelle a quand $t \to +\infty$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} [f(t+1)-f(t)]dt$ converge, et préciser sa valeur.

Exercice 9-5
Donner un exemple de fonction définie sur $\mathbf{R}^+$ qui ne tende pas vers 0 à l'infini mais dont l'intégrale converge (et même converge absolument) en $+\infty$.

Exercice 9-6
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbf{R}^+$ vers $\mathbf{R}$. On suppose que l'intégrale de f converge absolument en $+\infty$ mais aussi que l'intégrale de $(f')^2$ converge en $+\infty$.
1) Montrer pour tout $x \geq 1$ l'identité :

$$f(x) = \int_{x-1}^{x} f(t)\,dt + \int_{x-1}^{x} (t-x+1)f'(t)\,dt.$$

2) Montrer pour tout $x \geq 1$ la majoration :

$$|f(x)| \leq \int_{x-1}^{x} |f(t)|\,dt + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\int_{x-1}^{x} (f'(t))^2\,dt\right)^{1/2}.$$

3) Conclure que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.