Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2013-2014

Math IV - PMI - Algèbre

Feuille d'exercices n° 5

FORMES SESQUILINÉAIRES - HERMITIENNES

Exercice 1.

1. Les applications suivantes sont-elles des formes sesquilinéaires hermitiennes ?
   (a) $h_1 : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ donnée, pour tous $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{C}^3$, par :
   $$h_1(x, y) = \overline{x}_1 y_1 + 3\overline{x}_2 y_2 + 2i\overline{x}_3 y_3 + (2 + 3i)\overline{x}_1 y_2 + (2 - 3i)\overline{x}_2 y_1 + (1 - 5i)\overline{x}_2 y_3 + (1 + 5i)\overline{x}_3 y_2$$
   (b) $h_2 : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ donnée par $h_2(A, B) = \mathrm{tr}({}^t\overline{A} \cdot B)$.

   Lorsque c'est le cas, permettent-elles de définir un produit scalaire hermitien ?
2. Soit E l'espace des fonctions continues de $[-1, 1]$ vers $\mathbb{C}$. Pour $f \in E$ et $f = a + ib$ avec a, b à valeurs réelles, on rappelle que $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} a(x)\,\mathrm{d}x + i\int_{-1}^{1} b(x)\,\mathrm{d}x$. Montrer que $h_3 : E \times E \to \mathbb{C}$ définie par $h_3(f, g) = \int_{-1}^{1} \overline{f(x)}g(-x)\,\mathrm{d}x$ est une forme sesquilinéaire hermitienne. Est-elle positive ? négative ? définie ?

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie n. Soit s une forme sesquilinéaire sur E. Montrer que s est hermitienne si et seulement si sa matrice S dans une base quelconque satisfait la relation : ${}^tS = \overline{S}$.

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{C}_2[X]$ l'espace des polynômes à coefficients complexes et de degré au plus 2. On définit $q : E \to \mathbb{C}$ par $q(P) = \int_0^1 |P(x)|^2\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que q est une forme quadratique hermitienne en exhibant sa forme polaire. En déduire que (E, q) est un espace hermitien.
2. Déterminer une base orthonormée du sous-espace vectoriel $F = \{2\mu - \nu + 3i\mu X^2 \mid \mu, \nu \in \mathbb{C}\}$.
3. Justifier l'existence et déterminer la valeur de
   $$\inf\left\{\int_0^1 |1 - 2\mu + \nu - 3i\mu x^2|^2\,\mathrm{d}x \;\middle|\; \mu, \nu \in \mathbb{C}\right\}.$$

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire hermitien noté $\langle\ ,\ \rangle$.Soit u un endomorphisme (linéaire) de E. On suppose que pour tout $x \in E$, $\langle u(x), x\rangle = 0$. Montrer que u est l'application nulle.

Exercice 5. Soit E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des application continues de $[0; 1]$ dans $\mathbb{C}$ que l'on munit du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^1 \overline{f(t)}g(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Soit $H = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E et déterminer son orthogonal.
2. Que peut-on en déduire sur la dimension de H ?

Exercice 6. Soit $(E, <, >)$ un espace hermitien et f un endomorphisme ($\mathbb{C}$-linéaire) de E. Soit λ une valeur propre de f. Démontrer les propriétés suivantes :

1. Si f est bijective et $f^* = f^{-1}$ alors $|\lambda| = 1$.
2. Si $f^* = f$ alors $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. Si $f^* = -f$ alors $\lambda \in \mathbb{R}i$.
4. S'il existe un endomorphisme g de E tel que $f = g^* \circ g$ alors $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 7. Sans faire de calculs, expliquer pourquoi la matrice suivante admet au moins une valeur propre positive et une négative :

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1+i\sqrt{2} & -i \\ 1-i\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ i & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel complexe de dimension 3. Déterminer le rang et la signature de la forme hermitienne h dont la matrice dans une certaine base $\mathcal{B}$ de E est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2i \\ 0 & -2 & 1+i \\ 2i & 1-i & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9. Soit q la forme quadratique hermitienne de $\mathbb{C}^3$ définie dans la base canonique par :

$$q(x) = |x_1|^2 + 3|x_2|^2 + 6|x_3|^2 + i\overline{x}_1 x_2 - i x_1 \overline{x}_2 + 2i\overline{x}_2 x_3 - 2i x_2 \overline{x}_3.$$

Déterminer la forme polaire associée, le rang et la signature.