

**Feuille d'exercices n° 4**

FONCTIONS RÉELLES À VARIABLE RÉELLE

**Exercice 1.** Déterminer les ensembles de définitions des fonctions :

$$f_1(x) = \frac{x^2 + 3}{1 - |x|}; \quad f_2(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}; \quad f_3(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}; \quad f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - x - 2}};$$

$$f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4 - x^2}}; \quad f_6(x) = \frac{\cos(x)}{1 + \sin(2x)}; \quad f_7(x) = \sqrt{2 \cos(x) - 1}.$$

**Exercice 2.** Trouver les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^n - 1} \quad (n \in \mathbb{N}); \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + x^3 - 2}{x^3 + x^2 - 2}; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x - 1 - \sqrt{x + 1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 + x^2}}{x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt{x}}; \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} x + \sqrt{x^2 + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + 1} - \sqrt{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x) \cdot \ln(\ln(x))$$

**Exercice 3.** Démontrer que si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l'$  alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = l + l'$ .

**Exercice 4.** Montrer que si  $\phi(x) > 0$  et si  $\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) = \lambda$ , alors  $\lambda \geq 0$ . En déduire que

$$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l' \end{cases} \Rightarrow l \leq l'.$$

**Exercice 5.** Etudier la continuité en 0 des fonctions :

$$f_1(x) = x + \sqrt{x^2}; \quad f_2(x) = x - \frac{|x|}{x}; \quad f_3(x) = \frac{1}{1 + |x|}.$$

**Exercice 6.** Etudier la continuité des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \sqrt{x}; \quad f_2(x) = xE(x); \quad f_3(x) = (x - E(x))^2; \quad f_4(x) = E(x) + (x - E(x))^2;$$

$$f_5(x) = \frac{x}{x^2 - 1}; \quad f_6(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x+2}}.$$

**Exercice 7.** Montrer que la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{pour } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

est continue sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 8.** Montrer que la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = 10^{-\frac{1}{(x-3)^2}} & \text{pour } x \neq 3 \\ f(3) = 0 \end{cases}$$

est continue sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 9.** Montrer que la fonction  $x \mapsto \frac{x^3 + 8}{x + 2}$  se prolonge par continuité en  $-2$ .

**Exercice 10.** Soit  $f$  une application de  $[a, b]$  dans lui-même telle que, pour tout  $x_1$  et  $x_2$  de  $[a, b]$ ,  $x_1$  différent de  $x_2$ ,

$$|f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2| .$$

Montrer que  $f$  est continue.

En déduire que l'équation  $f(x) = x$  admet une unique solution. (On pourra étudier la fonction  $F(x) = f(x) - x$ )

**Exercice 11.** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Soient  $f, g$  deux applications continues de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  telles que :

$$\forall x \in I, (f(x))^2 = (g(x))^2 \neq 0 .$$

Montrer que  $f = g$  ou  $f = -g$ .

**Exercice 12.** Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $x \mapsto f(x)$  soit croissante et  $x \mapsto f(x)/x$  soit décroissante. Montrer que  $f$  est continue.

**Exercice 13.** Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  continue en 0 telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x) .$$

Montrer que  $f$  est constante.

**Exercice 14.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty .$$

Montrer que  $f$  admet un minimum absolu.

**Exercice 15.** Soient  $f$  une application bornée de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $g$  une application continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $g \circ f$  et  $f \circ g$  sont bornées.

**Exercice 16.** Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une application continue telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = l < 1.$$

Montrer qu'il existe un  $\alpha \in [0, +\infty[$  tel que  $f(\alpha) = \alpha$ .

**Exercice 17.** Soit  $f : [0; +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction croissante et positive. On suppose qu'il existe  $x_0$  tel que  $f(x_0) < x_0$ . Montrer qu'il existe  $y$  tel que  $f(y) = y$ .

**Exercice 18.** Un train part de Bordeaux à 8h02 et arrive à Paris-Montparnasse à 12h02. Il s'est arrêté 1 minutes à Angoulême à 9h13 et 59 secondes à St Pierre des Corps à 10h58. La distance parcourue est de 600 km. Montrer qu'il existe un intervalle de temps d'une durée de 2 heures durant lequel le train a parcouru exactement 300 km.

**Exercice 19.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .

On considère l'application polynomiale  $f_n$  définie par  $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x - 1$ .

1. Montrer qu'il existe un unique réel  $\alpha_n \in ]0, 1[$  tel que  $f_n(\alpha_n) = 0$ . Calculer  $\alpha_2$ .
2. Montrer que la suite  $(\alpha_n)$  est décroissante et convergente. (Etudier  $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) - f_n(\alpha_n)$ )
3. Calculer la limite des  $\alpha_n^n$ . En déduire la limite des  $\alpha_n$ .

**Exercice 20.** On pose  $f_n(x) = x^n - \lambda(1 - x^3)$ , avec  $\lambda > 0$ .

1. Montrer que  $f_n$  s'annule une unique fois sur  $]0, 1[$ . On note  $\alpha_n$  cette valeur.
2. Prouver que  $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) - f_n(\alpha_n) < 0$ . En déduire que  $(\alpha_n)$  est monotone.
3. Montrer que la suite  $(\alpha_n)$  est convergente. Calculer sa limite.

**Exercice 21.** Soit  $h$  une application continue de  $[0, 1]$  dans  $]0, 1[$ .

1. Montrer que l'équation  $h(x) = x^n$  admet au moins une solution dans  $]0, 1[$ .  
On suppose dans ce qui suit que  $h$  est strictement décroissante.
2. Montrer que la solution de  $h(x) = x^n$  est unique dans  $]0, 1[$ . On note  $\alpha_n$  cette valeur et  $\beta_n = h(\alpha_n)$ .
3. Montrer que la suite  $(\alpha_n)$  est strictement croissante et que la suite  $(\beta_n)$  est strictement décroissante.
4. En déduire que ces suites sont convergentes et déterminer leur limite.

**Exercice 22.** Soit  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x + \ln(x)$ .

1. Montrer que l'équation  $f(x) = n$  admet une unique solution dans  $[1, n]$ , notée  $u_n$ , pour tout  $n \geq 1$ .
2. Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante non majorée. Que peut-on en conclure ?
3. Montrer que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $0 < n - \ln(n) \leq u_n$ .
4. Déterminer les limites de  $\left(\frac{u_n - n}{n}\right)$ ,  $\left(\frac{u_n}{n}\right)$  et  $(u_n - n + \ln(n))$ .

**Exercice 23.** Soient  $f$  et  $g$  deux applications continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  telles que, pour tout  $x$  de  $[0, 1]$  :

$$0 < f(x) < g(x).$$

1. Pour tout  $x$  de  $[0, 1]$ , on pose  $h(x) = f(x)/g(x)$ .

Montrer que l'application  $h$  est continue de  $[0, 1]$  dans  $]0, 1[$ .

2. Montrer qu'il existe deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  de  $[0, 1]$ , tels que pour tout  $x$  de  $[0, 1]$ ,

$$0 < h(\alpha) \leq h(x) \leq h(\beta) < 1.$$

3. Montrer que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , l'équation

$$h(x) = x^n, \tag{1}$$

possède au moins une solution  $]0, 1[$ .

4. On suppose de plus, dans tout ce qui suit, que  $h$  est strictement décroissante.

(a) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'équation (1) ci-dessus possède alors une unique solution  $a_n \in ]0, 1[$ . On pose  $b_n = h(a_n)$ .

(b) Montrer que la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , ainsi obtenue, est strictement croissante, et que la suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est strictement décroissante.

(c) En déduire que les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont convergentes et déterminer les limites.

**Exercice 24.** Pour chacune des propositions, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier cette réponse par une démonstration ou un contre-exemple

1. Si  $f : ]0, +\infty[ \mapsto \mathbb{R}$  est une fonction strictement décroissante, alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

2. Si  $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$  est une fonction continue et si  $f(x) \neq 0$  pour tout  $x$  de  $[a, b]$ , alors il existe un réel  $m > 0$  tel que :

$$(\forall x \in [a, b], f(x) \geq m) \quad \text{ou} \quad (\forall x \in [a, b], f(x) \leq -m).$$

3. Il existe une application continue bijective de  $[0, 1[$  sur  $]0, 1[$ .

4. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Si  $f(x) = x$  pour tout rationnel  $x$ , alors  $f(x) = x$  pour tout réel.

5. Il existe une fonction  $f$  telle que  $f$  soit discontinue en tout point de  $\mathbb{R}$  et telle que  $f \circ f$  soit continue en tout point de  $\mathbb{R}$ .