Chapitre 5

Continuité des fonctions vectorielles

5.2 Continuité et topologie

5.2.1 Autres caractérisations équivalentes de la continuité

On rappelle que E et F désignent deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.

Théorème 1. *Soit $f : E \longrightarrow F$. On a équivalence entre :*
(i). f est continue sur E,
(ii). l'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de E,
(iii). l'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de E.

Démonstration.

- $(i) \Rightarrow (ii)$: Supposons que f est continue sur E. Soit Y un fermé de F. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $f^{-1}(Y)$ convergeant vers ℓ. Alors la suite $(y_n)_n = (f(x_n))_n$ est une suite d'éléments de Y qui converge vers $f(\ell)$ par continuité de la fonction f. Comme Y est fermé, on en déduit que $f(\ell) \in Y$, ce qui démontre que $\ell \in f^{-1}(Y)$. Ainsi, $f^{-1}(Y)$ est un fermé de E.
- $(ii) \Rightarrow (iii)$: cela découle simplement du fait que $f^{-1}(F\backslash Y) = E\backslash f^{-1}(Y)$. En effet, pour $x \in E$, on a :

$$x \in f^{-1}(F\backslash Y) \iff f(x) \in F\backslash Y \iff f(x) \notin Y \iff x \notin f^{-1}(Y) \iff x \in E\backslash f^{-1}(Y).$$

  Soit V un ouvert de F, alors $F\backslash V$ est un fermé de F donc $f^{-1}(F\backslash V) = E\backslash f^{-1}(V)$ est un fermé de E. Par conséquent, $f^{-1}(V)$ est un ouvert de E.
- $(iii) \Rightarrow (i)$: soit $a \in E$. On veut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|x - a\|_E < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon$. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $V = B(f(a), \varepsilon)$. L'ensemble V est un ouvert de F contenant $f(a)$, donc $f^{-1}(V)$ est un ouvert de E contenant a. Par définition d'un ouvert, il existe $\eta > 0$ tel que $B(a, \eta) \subset f^{-1}(V)$. Ainsi, pour tout $x \in E$, on a

$$\|x - a\|_E < \eta \Rightarrow x \in B(a, \eta) \subset f^{-1}(V) \Rightarrow f(x) \in V \text{ i.e. } \|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon.$$

□

Remarque. Attention, le résultat est faux en terme d'image directe. Par exemple, $\sin(]0;\pi[) =]0;1]$ avec $]0;\pi[$ ouvert et pas $]0;1]$ et $\exp(\mathbb{R}) =]0;+\infty[$ n'est pas fermé alors que $\mathbb{R}$ l'est.

Exemples :

1. L'ensemble $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = y - x$. Alors f est continue sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale, et on peut écrire

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) > 0\} = f^{-1}(]0;+\infty[)$$

   avec $]0;+\infty[$ ouvert de $\mathbb{R}$.

2. L'ensemble X des matrices de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ non inversibles est un fermé de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$. En effet, on peut écrire

$$X = \{M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det(M) = 0\} = \det^{-1}(\{0\})$$

   et la fonction det est continue de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{R}$ car polynomiale en les coefficients de la matrice.

5.2.2 Continuité et compacité

Théorème 2. *Soient $K \subset E$ un compact et $f : K \longrightarrow F$ une application continue. Alors $f(K)$ est un compact de F.*
En d'autres termes, l'image d'une partie compacte par une application continue est une partie compacte.

Démonstration. Soit $f : K \subset E \longrightarrow F$ continue avec K un compact de E. Soit $(y_n)_n \in f(K)^{\mathbb{N}}$, alors il existe une suite $(x_n)_n \in K^{\mathbb{N}}$ telle que $y_n = f(x_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque K est compact, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers $\ell \in K$. Par continuité de f, la suite $(y_{\varphi(n)})_n = (f(x_{\varphi(n)}))_n$ converge alors vers $f(\ell) \in f(K)$, ce qui démontre que $f(K)$ est compact. □

Corollaire 1. *Soit $f : K \subset E \longrightarrow F$. Si K est une partie compacte de E et f continue, alors f est bornée.*

Démonstration. D'après le théorème précédent, $f(K)$ est une partie compacte donc bornée. □

Théorème 3 (Théorème des bornes atteintes)**.** *Soit $f : K \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ continue où K est un compact non vide de E. Alors f est bornée et atteint ses bornes (elle admet un minimum et un maximum).*

Démonstration. Soit $f : K \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ continue avec K une partie compacte non vide de E. On a déjà vu que $f(K)$ est un compact de $\mathbb{R}$ (non vide puisque $K \neq \emptyset$), c'est donc une partie bornée non vide de $\mathbb{R}$, ce qui démontre l'existence de $m = \inf f(K)$ et $M = \sup f(K)$. Il nous reste à montrer que ces bornes sont atteintes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M - \dfrac{1}{n+1} < M$, donc par définition de la borne supérieure, il existe $x_n \in K$ tel que

$$M - \frac{1}{n+1} < f(x_n) \leq M.$$

En faisant varier $n \in \mathbb{N}$, cela détermine une suite $(x_n)_n$ à valeurs dans K telle que $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M$. Puisque la partie K est compacte, il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $a \in K$ tels que $x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$. Par continuité de f en a, on en déduit que la suite $(f(x_{\varphi(n)}))_n$ converge vers $f(a)$ ce qui démontre que $f(a) = M$ par unicité de la limite (et extraction). On procède de manière similaire avec la borne inférieure. □

Exemple : Soit K un compact non vide et $x \in E$. On définit la distance de x à K par

$$d(x, K) = \inf\{\|y - x\| \mid y \in K\}.$$

Montrons que cette distance est atteinte. La fonction $y \longmapsto \|y - x\|$ est continue (comme composée de la fonction lipschitzienne $y \longmapsto y - x$ et de la norme) sur le compact K, à valeurs réelles. Elle y admet donc un maximum et un minimum, et par conséquent, il existe $y_0 \in K$ tel que

$$\inf\{\|y - x\| \mid y \in K\} = \min\{\|y - x\| \mid y \in K\} = \|y_0 - x\|.$$

5.3 Continuité et linéarité

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F. C'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

5.3.1 Continuité des applications linéaires

Théorème 4. *Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i). *u est continue,*

(ii). *u est continue en 0_E,*

(iii). $\exists k \geq 0$, $\forall x \in E$, $\|u(x)\|_F \leq k\|x\|_E$,

(iv). *u est bornée sur la boule unité fermée,*

(v). *u est bornée sur la sphère unité,*

(vi). *u est lipschitzienne,*

Démonstration. Soit $u : E \longrightarrow F$ linéaire.

- $(i) \Rightarrow (ii)$: il est clair par définition que si u est continue sur E, elle est en particulier continue en 0_E.
- $(ii) \Rightarrow (iii)$: supposons u continue en 0. En appliquant la définition de la continuité avec $\varepsilon = 1$, il existe $\eta > 0$, tel que

$$\forall x \in E, \quad \|x\|_E \leq \eta \Rightarrow \|u(x)\|_F \leq 1.$$

  Posons $k = \dfrac{1}{\eta}$ et montrons que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|_F \leq k\|x\|_E$. Soit $x \in E$. Si $x = 0_E$, les deux quantités intervenants sont nulles donc l'inégalité est triviale. Sinon, posons $x' = \dfrac{\eta}{\|x\|_E}x$, alors $\|x'\|_E = \eta$, donc $\|u(x')\|_F \leq 1$. Par linéarité de u, on a de plus, $u(x') = \dfrac{\eta}{\|x\|_E}u(x)$, ce qui donne finalement par homogénéité de la norme :

$$\|u(x')\|_F = \frac{\eta}{\|x\|_E}\|u(x)\|_F \leq 1 \quad \text{d'où} \quad \|u(x)\|_F \leq \frac{1}{\eta}\|x\|_E = k\|x\|_E.$$

- $(iii) \Rightarrow (iv)$: Supposons qu'il existe $k \geq 0$ tel pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|_F \leq k\|x\|_E$. Alors en particulier, pour tout $x \in \overline{B}(0_E, 1)$, on a

$$\|u(x)\|_F \leq k\|x\|_E \leq k$$

  ce qui prouve que u est bornée sur la boule unité fermée.
- $(iv) \Rightarrow (v)$: il est clair que puisque $S(0_E, 1) \subset \overline{B}(0_E, 1)$, si u est bornée sur la boule unité fermée, elle l'est aussi sur la sphère unité fermée.

- $(v) \Rightarrow (vi)$: supposons qu'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in E$ de norme 1, $\|u(x)\|_F \leq M$. Soient $x, y \in E$. Par linéarité de u, on a $\|u(x) - u(y)\|_F = \|u(x-y)\|_F$. Supposons dans un premier temps $x \neq y$, alors le vecteur $z = \dfrac{x-y}{\|x-y\|_E}$ est de norme 1, donc

$$\|u(z)\|_F = \frac{1}{\|x-y\|_E}\|u(x-y)\|_F \leq M \quad \text{d'où} \quad \|u(x)-u(y)\|_F \leq M\|x-y\|_E.$$

  Cette inégalité étant toujours vraie lorsque $x = y$ (les deux termes sont nuls), on en déduit que u est M-lipschitzienne.
- $(vi) \Rightarrow (vii)$: on a déjà vu que toutes les fonctions lipschitziennes sont continues.

□

Exemple : Soit $E = \mathcal{C}([0;1], \mathbb{K})$ et $u : E \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $u(f) = f(1) - f(0)$. Alors u est une forme linéaire sur E. Prenons pour $\|\,.\,\|_E$ la norme infinie $\|\,.\,\|_\infty : f \longmapsto \sup\limits_{t\in[0;1]} |f(t)|$. Alors pour toute fonction $f \in E$, on a

$$|u(f)| = |f(1) - f(0)| \leq |f(1)| + |f(0)| \leq 2\|f\|_\infty$$

donc u est continue sur E muni de la norme $\|\,.\,\|_\infty$.

Prenons pour $\|\,.\,\|_E$ la norme $\|\,.\,\|_1 : f \longmapsto \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$. Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : t \longmapsto t^n$, alors $|u(f_n)| = 1$, mais

$$\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi, la suite $(f_n)_n$ converge pour $\|\,.\,\|_1$ vers la fonction nulle, alors que la suite $(u(f_n))_n$ converge vers $1 \neq u(\widetilde{0}) = 0$. Par conséquent, l'application linéaire u n'est pas continue car elle est discontinue en 0_E.

(On retrouve encore une fois le fait que les normes $\|\,.\,\|_1$ et $\|\,.\,\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.)

Norme subordonnée d'une application linéaire continue :

Définition 1. *Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ continue. On définit la norme subordonnée aux normes $\|\,.\,\|_E$ et $\|\,.\,\|_F$ de u par l'une des trois caractérisations équivalentes :*

$$\begin{aligned} |||u||| &= \sup\{\|u(x)\|_F \mid x \in E, \|x\|_E \leq 1\} \\ &= \sup\{\|u(x)\|_F \mid x \in E, \|x\|_E = 1\} \\ &= \sup\left\{\frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} \mid x \in E, x \neq 0_E\right\}. \end{aligned}$$

Proposition 1. *La norme subordonnée définit une norme sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{L}_c(E,F) = \{u \in \mathcal{L}(E,F) \mid u$ continue $\}$.*

Démonstration. Notons $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'ensemble $\{u \in \mathcal{L}(E,F) \mid u \text{ continue }\}$. On a déjà expliqué que $|||\,.\,|||$ est bien définie de $\mathcal{L}_c(E,F)$ dans $\mathbb{R}^+$.

- Soit $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$ telle que $|||u||| = 0$, alors pour tout $x \in E$, $x \neq 0_E$, on a $0 \leq \dfrac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq 0$ d'où $\|u(x)\|_F = 0$ (égalité encore valable si $x = 0_E$), et ainsi u est l'application nulle. La réciproque est vraie.

- Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$, alors

$$|||\lambda u||| = \sup\{\|\lambda u(x)\|_F \mid x \in E, \|x\|_E \leq 1\} = |\lambda|\,|||u|||.$$

- Soient $u, v \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $x \in E$, $\|x\|_E \leq 1$, on a

$$\|(u+v)(x)\|_F = \|u(x)+v(x)\|_F \leq \|u(x)\|_F + \|v(x)\|_F \leq |||u||| + |||v|||$$

donc $|||u||| + |||v|||$ est un majorant de l'ensemble $\{\|(u+v)(x)\|_F \mid x \in E, \|x\|_E \leq 1\}$. Puisque la borne supérieure est le plus petit des majorants, on en déduit que $|||u+v||| \leq |||u||| + |||v|||$, ce qui démontre que $|||\,.\,|||$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$.

□

Théorème 5. *Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue.*

Démonstration. Si $\dim(E) = 0$, $E = \{0_E\}$ et la seule application linéaire possible est l'application nulle, qui est continue en 0_E. Si $\dim(E) = n \geq 1$. Considérons une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E et la norme $\|\,.\,\|_E = \|\,.\,\|_\infty : x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \longmapsto \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i|$. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Pour $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \in E$, on a par linéarité de u :

$$u(x) = x_1u(e_1) + \cdots + x_nu(e_n)$$

d'où

$$\|u(x)\|_F \leq |x_1|\,\|u(e_1)\|_F + \cdots + |x_n|\,\|u(e_n)\|_F \leq (\|u(e_1)\|_F + \cdots + \|u(e_n)\|_F)\|x\|_\infty = k\|x\|_\infty$$

en posant $k = \|u(e_1)\|_F + \cdots + \|u(e_n)\|_F \geq 0$, ce qui démontre la continuité de u (pour la norme $\|\,.\,\|_\infty$ puis pour n'importe quelle norme sur E puisqu'elles sont toutes équivalentes en dimension finie). □

Exemples :

1. Si $E = \mathbb{R}^d$ et $F = \mathbb{R}$, les projections coordonnées $p_i : (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \longmapsto x_i$ sont linéaires donc continues (car $\dim \mathbb{R}^d < +\infty$).
2. Si E est de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, l'application

$$p_i : x = \sum_{j=1}^{n} x_je_j \in E \longmapsto x_i$$

est linéaire donc continue.
3. L'application $\mathrm{Tr} : \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue.
4. L'application de transposition de $\mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ est continue.

Remarque. Attention : ce résultat est faux en dimension infinie. Prenons par exemple $E = \mathcal{C}^1([0;1];\mathbb{R})$ et D l'application de dérivation qui est bien linéaire. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \longmapsto t^n$. On a vu que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|f_n\|_\infty = 1 \text{ alors que } \|D(f_n)\|_\infty = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

ce qui prouve que D n'est pas continue (pour $\|\,.\,\|_\infty$). En fait, on pourrait même démontrer qu'il n'est pas possible de munir E d'une norme qui rende D continue. Supposons par l'absurde qu'il existe une telle norme $\|\,.\,\|$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \longmapsto e^{nx}$, alors on a

$$\|D(f_n)\| = \|f_n'\| = \|nf_n\| = n\|f_n\|$$

ce qui montre que D ne peut pas être bornée sur la sphère unité.