On considère des fonctions numériques, c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, d'une variable réelle. (La plupart des notions s'étendent cependant aux fonctions vectorielles de plusieurs variables.) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $f_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$. Elle *converge simplement* vers $f : D \to \mathbb{K}$ si, pour tout $x \in D$, la *suite numérique* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$:

$$\forall x \in D\,,\ \forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N \in \mathbb{N}\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ (n \geq N \ \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\,).$$

De plus, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément* sur $A \subset D$ si :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N \in \mathbb{N}\,,\ \forall x \in A\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ (n \geq N \ \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\,).$$

De façon équivalente : il existe $N_0 \in N$ tel que les fonctions $f_n - f$ soient bornées sur A pour $n \geq N_0$, et la suite numérique $(\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)|)_{n\geq N_0}$ converge vers zéro.
S'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $(|f_n(x_n) - f(x_n)|)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas zéro, la convergence n'est pas uniforme sur A.
Critère de Cauchy uniforme Une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions $f_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ (ou $\mathbb{R}^p$) converge uniformément sur A si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N \in \mathbb{N}\,,\ \forall x \in A\,,\ \forall p, q\ \in \mathbb{N}\,,\ (p \geq q \geq N \ \Rightarrow |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon\,).$$

Passages à la limite Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f on dit que f est sa *limite simple*. Si elle converge uniformément on dit que f est sa *limite uniforme*.

- La limite simple d'une suite de fonctions positives est positive.
- La limite simple d'une suite de fonctions à valeurs réelles *croissantes* est croissante.
- La limite simple d'une suite de fonctions *convexes* [1] est convexe.
- La limite uniforme d'une suite de fonctions *bornées* est bornée. (C'est faux pour la convergence simple.)
- La limite uniforme d'une suite de fonctions *continues* est continue. (C'est faux pour la convergence simple.)

Interversion de limites Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A vers f, si pour tout $n \geq N_0$ la fonction f_n a une limite $\ell_n \in \mathbb{K}$ en $a \in \overline{A}$ (on note $\overline{A}$ l'*adhérence* de A, définie comme l'ensemble des limites de suites convergentes d'éléments de A), alors la suite numérique $(\ell_n)_{n\geq N_0}$ a une limite $\ell \in \mathbb{K}$, la fonction f a une limite en a et ces limites sont égales :

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,.$$

Ce résultat est vrai avec $a = +\infty$ dans le cas où A est non majoré, et avec $a = -\infty$ dans le cas où A est non minoré.
Intégration Soient des réels a et b avec $a < b$.

- Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions $f_n : [a, b] \to \mathbb{K}$ continues, convergeant uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f, alors la suite numérique $(\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, et

$$\|f_n - f\|_1 := \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

  Ce résultat est encore vrai pour une suite de fonctions *continues par morceaux* [2] sur $[a, b]$, convergeant uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction également continue par morceaux.

1. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe sur l'intervalle I si : $\forall x, y \in I\,,\ \forall \theta \in [0, 1],\ f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta)f(y)$.
2. Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux s'il existe une *subdivision* $(a_i)_{0\leq i\leq p}$ de $[a, b]$ telle que, pour tout $i \in \{0, \dots, p-1\}$, la *restriction* de f à $]a_i, a_{i+1}[$ admet un prolongement continu sur $[a_i, a_{i+1}]$.

- Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions $f_n : I \to \mathbb{K}$ continues un *intervalle* I, converge uniformément sur tout segment de I vers f, alors pour tout $a \in I$, la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des *primitives* $F_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge uniformément sur tout segment de I vers $F : x \in I \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème de convergence dominée Soit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions $f_n : I \to \mathbb{K}$, continues par morceaux [3], convergeant simplement vers f. Si de plus il existe une fonction continue par morceaux $g : I \to \mathbb{R}^+$ telle que $\int_I g(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}^+$ (ce qui est automatique si I est un segment, et demande que l'*intégrale généralisée* $\int_I g(t)\,\mathrm{d}t$ converge sinon) et pour tout $x \in I$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$, alors les fonctions f_n et f sont *absolument intégrables* sur I et la suite numérique $(\int_I f_n(x)\mathrm{d}x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_I f(x)\mathrm{d}x$.

DÉRIVATION Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions *de classe $\mathscr{C}^1$* sur un intervalle I, convergeant simplement vers une fonction g et telle que la suite des fonctions dérivées $(g'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction f. Alors la suite (g_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g de classe $\mathscr{C}^1$ dont la *dérivée* est f.

3. Une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux sur l'intervalle I si elle est continue par morceaux sur tout segment de I.