

Une *suite numérique* est une *fonction* de \mathbb{N} (ou $\{n \in \mathbb{N}; n \geq n_0\}$ pour $n_0 \in \mathbb{N}$) dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ pour une *suite réelle* ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ pour une *suite complexe*. On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (ou $(u_n)_{n \geq n_0}$) la suite de *terme général* u_n . L'ensemble des suites réelles, noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, est naturellement muni d'une structure de *\mathbb{R} -espace vectoriel*. De même, l'ensemble des suites complexes $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est un *\mathbb{C} -espace vectoriel*. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} l'application

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} &\rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} &\mapsto (S_n)_{n \in \mathbb{N}}; \forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k, \end{aligned}$$

est un isomorphisme dont la réciproque est donnée par

$$(S_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_n)_{n \in \mathbb{N}}; \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = S_n - S_{n-1}, \quad u_0 = S_0.$$

Étant donnée une suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, son image $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par σ définit une *série numérique*, que l'on note $\sum u_n$. (On définit de façon analogue la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ associée à $(u_n)_{n \geq n_0}$.)

▷ Les nombres S_n sont appelés *sommes partielles* de la série $\sum u_n$.

▷ Le *terme général d'une série* $\sum u_n$ est u_n .

On dit qu'une série $\sum u_n$ est *convergente* si la suite de ses sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge*. La *somme* d'une série numérique convergente $\sum u_n$ est le nombre

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n := \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k \quad \left(\text{ou } \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n := \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n_0}^n u_k \text{ pour la série } \sum_{n \geq n_0} u_n \right),$$

et le *reste d'ordre n* est le nombre $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p$.

- La suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des restes d'une série convergente converge vers zéro.
- Le terme général d'une série convergente tend vers zéro. Le fait que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tende vers zéro ne suffit pas pour que $\sum u_n$ soit convergente (voir par exemple la série harmonique).
- Une *série télescopique* $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge si et seulement si la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Si c'est le cas, $\sum_{n=n_0}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n) = \lim(v_n) - v_{n_0}$.

• L'ensemble des séries convergentes forme un espace vectoriel.

Une série non convergente est dite *divergente*. La *nature* d'une série est sa convergence ou sa divergence.

• La somme d'une série convergente et d'une série divergente est divergente. La nature de la somme de deux séries divergentes est indéterminée.

Séries à termes réels positifs Une série à termes positif converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est *bornée*.

Théorème de comparaison. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs. Si l'une des conditions des suivantes est satisfaite

- il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \leq v_n$,
- ou $u_n = O(v_n)$, en particulier si $u_n = o(v_n)$,
- (**comparaison logarithmique**) il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n > 0$, $v_n > 0$ et $u_{n+1}/u_n \leq v_{n+1}/v_n$,

et si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge, tandis que si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge. Si $u_n \sim v_n$ alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Règle de d'Alembert : soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle pour laquelle il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, $u_n > 0$.

- S'il existe $a < 1$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_{n+1}/u_n \leq a$, en particulier si la suite $(u_{n+1}/u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.
- S'il existe $a \geq 1$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_{n+1}/u_n \geq a$, en particulier si la suite $(u_{n+1}/u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Séries de référence La *série harmonique* $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Une *série de Riemann* $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Une *série de Bertrand* $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)$.

Une *série géométrique* $\sum a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$.

La série $\sum \frac{a^n}{n!}$ converge quel que soit $a \in \mathbb{R}^+$, et en fait pour tout $a \in \mathbb{C}$.

Critère de Cauchy Une série numérique $\sum u_n$ est convergente si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k \right| \leq \varepsilon.$$

Séries absolument convergentes Une série numérique $\sum u_n$ est *absolument convergente* si la série $\sum |u_n|$ converge. *Toute série absolument convergente est convergente*. La réciproque est fausse.

Comparaison des sommes partielles ou des restes Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si la série $\sum a_n$ diverge on compare les sommes partielles :

• Si $u_n = O(a_n)$ alors $\sum_{k=0}^n u_k = O\left(\sum_{k=0}^n a_k\right)$. Si $u_n = o(a_n)$ alors $\sum_{k=0}^n u_k = o\left(\sum_{k=0}^n a_k\right)$. •

• Si $u_n \in \mathbb{R}^+$ (à partir d'un certain rang), et $u_n \sim a_n$ alors $\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n a_k$. •

Si la série $\sum a_n$ converge on compare les restes :

• Si $u_n = O(a_n)$ alors $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k\right)$. Si $u_n = o(a_n)$ alors $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k\right)$. •

• Si $u_n \in \mathbb{R}^+$ (à partir d'un certain rang), et $u_n \sim a_n$ alors $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$. •

Théorème des séries alternées. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle *monotone* et convergeant vers zéro. On note $u_n = (-1)^n v_n$. Alors la *série alternée* $\sum u_n$ converge. De plus, son reste R_n est du signe de u_{n+1} et vérifie $|R_n| \leq u_{n+1}$ pour tout n .

Théorème d'Abel. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites numériques telles que la suite (A_n) des sommes partielles de $\sum a_n$ soit bornée, la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers zéro, et la série $\sum |b_n - b_{n+1}|$ converge. Alors la série $\sum a_n b_n$ converge.