On appelle *période* d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tout nombre réel $T$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}\,,\ f(t+T) = f(t)\,.$$

On dit que $f$ est *périodique* si elle admet une période non nulle, et plus précisément qu'elle est *$T$-périodique* si $T$ est une période strictement positive.
Une fonction $T$-périodique est dite *continue par morceaux* si sa restriction au segment $[0,T]$ est continue par morceaux, c'est-à-dire s'il existe une *subdivision* $(a_0,\dots,a_n)$ de $[0,T]$ telle que, pour tout $j \in \{0,\dots,n-1\}$, la restriction de $f_{]a_j,a_{j+1}[}$ admette un *prolongement* continu.
(La fonction tan *n'est pas* continue par morceaux.)
Si $g$ est continue par morceaux sur un segment $[a,a+T]$, il existe une unique fonction $f$ qui soit $T$-périodique, continue par morceaux et coïncidant avec $g$ sur $[a,a+T[$.
(En général, $f$ est «seulement» continue par morceaux même si $g$ est continue.)

- Toute fonction périodique continue par morceaux est bornée.
- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $T$-périodique et continue par morceaux. Alors pour tout réel $a$ on a

$$\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\mathrm{d}t\,.$$

Étant données deux fonctions $f$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $T$-périodiques et continue par morceaux, on note

$$\langle f,g\rangle := \frac{1}{T}\int_0^T \overline{f(t)}g(t)\mathrm{d}t\,,\quad \|f\|_2 := \sqrt{\langle f,f\rangle}\,,$$

et l'on a :

$$\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2(\textit{inégalité triangulaire}), |\langle f,g\rangle| \leq \|f\|_2\,\|g\|_2(\textit{inégalité de Cauchy–Schwarz}).$$

Si l'on note $E_n : t \mapsto \mathrm{e}^{int}$ pour $n \in \mathbb{Z}$, $C_n : t \mapsto \cos(nt)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $S_n : t \mapsto \sin(nt)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, la famille de fonctions $\{E_n\,;\ n \in \mathbb{Z}\}$ est *orthonormée* dans l'espace $\mathscr{C}^0_{2\pi}$ des fonctions continues $2\pi$-périodiques muni de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ pour $T = 2\pi$, et la famille $\{C_n\,;\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{S_n\,;\ n \in \mathbb{N}^*\}$ est *orthogonale* dans ce même espace, avec

$$\|C_0\|_2 = 1\,,\ \|C_n\|_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \forall n \in \mathbb{N}^*\,,\quad \|S_n\|_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

On appelle *polynôme trigonométrique* toute *combinaison linéaire* (finie) d'éléments de la famille $\{E_n\,;\ n \in \mathbb{Z}\}$. Pour tout polynôme trigonométrique $P$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$P = \sum_{n=-p}^{p} c_n E_n\,,\quad c_n := \langle E_n|P\rangle\,,$$

ou de façon équivalente,

$$P = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{p}(a_n C_n + b_n S_n)\,,\quad a_n := c_n + c_{-n} = 2\langle C_n|P\rangle\,,\ b_n := i(c_n - c_{-n}) = 2\langle S_n|P\rangle\,.$$

On a de plus

$$\|P\|_2^2 = \sum_{n=-p}^{p} |c_n|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{p}(|a_n|^2 + |b_n|^2)\,.$$

*NB:* Il faut savoir *définir* les notions en *rouge* et démontrer les énoncés en bleu.

On appelle *série trigonométrique* toute *série de fonctions* de la forme $\Sigma(c_n E_n + c_{-n} E_{-n})$, avec $c_n \in \mathbb{C}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, que l'on note généralement comme une *série bilatère* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n E_n$. (Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté on omet d'écrire $n \in \mathbb{Z}$.)

Une série trigonométrique $\sum c_n E_n$ est *normalement convergente* si et seulement si la série numérique $\sum(|c_n| + |c_{-n}|)$ converge, ou de façon équivalente, la série numérique $\sum_{n\geq 1}(|a_n| + |b_n|)$ définie par $a_n := c_n + c_{-n}$ , $b_n := i(c_n - c_{-n})$, converge.

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est $2\pi$-périodique et continue par morceaux, on définit ses *coefficients de Fourier* par

$$c_n(f) := \langle E_n|f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,,$$

$$a_n(f) := 2\,\langle C_n|f\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

$$b_n(f) := 2\,\langle S_n|f\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

de sorte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)\,,\ b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))\,,$$

$$c_n(f) = \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2}\,,\ c_{-n}(f) = \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2}\,.$$

- ✓ Si $f$ est à valeurs *réelles*, ses coefficients trigonométriques $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont *tous réels*.
- ✓ Si $f$ est *paire*, ses coefficients $b_n(f)$ sont *tous nuls*.
- ✓ Si $f$ est *impaire*, ses coefficients $a_n(f)$ sont *tous nuls*.
- ✓ Si $\overline{f} : t \mapsto \overline{f(t)}$, $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$.
- ✓ Si $\check{f} : t \mapsto f(-t)$, $c_n(\check{f}) = c_{-n}(f)$.
- ✓ Si $f_a : t \mapsto f(t+a)$ (avec $a \in \mathbb{R}$), $c_n(f_a) = \mathrm{e}^{ina}\,c_n(f)$.
- ✓ On a : $|c_n(f)| \leq \|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$ , où $\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|\,\mathrm{d}t$, $\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$, $\|f\|_\infty = \max\{|f(t)|\,;\, t \in [0, 2\pi]\}$.

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est $2\pi$-périodique et continue par morceaux, on définit sa *série de Fourier* comme la série trigonométrique $\sum c_n(f)E_n$, qu'on écrit souvent [1]

$$\sum c_n(f)\mathrm{e}^{int}\,, \quad \text{ou encore} \quad \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n(f)\,cos(nt) + b_n(f)\,\sin(nt))\,.$$

En notant $\Sigma_p(f)$ les sommes partielles de sa série de Fourier, c'est-à-dire

$$\Sigma_p(f) : t \mapsto \sum_{n=-p}^{p} c_n(f)\mathrm{e}^{int} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{p}(a_n(f)\,cos(nt) + b_n(f)\,\sin(nt))\,,$$

on a, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\langle f - \Sigma_p(f)|E_m\rangle = 0$ quel que soit $m \in \mathbb{Z}$ tel que $|m| \leq p$. En particulier, $\langle f - \Sigma_p(f)|\Sigma_p(f)\rangle = 0$, ce qui implique l'*inégalité de Bessel* :

$$\|\Sigma_p(f)\|_2 \leq \|f\|_2\,.$$

1. avec le même abus de notation que pour les séries entières, sans flèche bien que ce soit une série de fonctions et non une série numérique.

De plus, les séries numériques $\sum |c_n(f)|^2$ (bilatère) et $\sum(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2)$ convergent et l'on a

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2) \le \|f\|_2^2 .$$

Par suite, $\lim_{|n|\to+\infty} c_n(f) = 0\,,\quad \lim_{n\to+\infty} a_n(f) = 0\,,\quad \lim_{n\to+\infty} b_n(f) = 0\,.$

---

**Lemme de Riemann-Lebesgue.** Si $f$ est une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ alors on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{int}\,\mathrm{d}t = 0 .$$

---

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est $2\pi$-périodique et de classe $\mathscr{C}^k$ (pour $k \in \mathbb{N}$) alors ses coefficients de Fourier vérifient $c_n(f^{(k)}) = (in)^k\, c_n(f)$, et par conséquent

$$c_n(f) = o\Big(\frac{1}{|n|^k}\Big), \quad |n| \to +\infty .$$

---

Si une série trigonométrique $\sum \gamma_n E_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ alors sa somme $f$ est continue, $2\pi$-périodique, et ses coefficients de Fourier sont précisément $c_n(f) = \gamma_n$.

---

**Théorème de Dirichlet.** Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est $2\pi$-périodique, continue par morceaux, et telle que

$$t \mapsto \frac{f(t) - f(t_0^-)}{t - t_0} \quad \text{et} \quad t \mapsto \frac{f(t) - f(t_0^+)}{t - t_0}$$

ont une limite respectivement quand $t \nearrow t_0$ et quand $t \searrow t_0$, où $f(t_0^-)$ désigne la limite à gauche de $f$ en $t_0$ et $f(t_0^+)$ sa limite à droite, alors la série de Fourier de $f$ converge en $t_0$ et

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\mathrm{e}^{int_0} = \frac{f(t_0^-) + f(t_0^+)}{2} .$$

---

**Théorème de convergence normale.** Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est $2\pi$-périodique, de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux *et* continue alors la série de Fourier de $f$ est normalement convergente et sa somme est $f$.

---

**Théorème de Parseval.** Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est $2\pi$-périodique et continue par morceaux alors la suite des sommes partielles $(\Sigma_p(f))_{p\in\mathbb{N}}$ de la série de Fourier de $f$ est telle que

$$\lim_{p\to+\infty} \|\Sigma_p(f) - f\|_2 = 0 ,$$

et

$$\lim_{p\to+\infty} \|\Sigma_p(f)\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2) = \|f\|_2^2 .$$

---

*NB:* Il faut savoir *définir* les notions en *rouge* et démontrer les énoncés en bleu.