Une *série entière* est une série de fonctions polynomiales de la forme $f_n : z \mapsto a_n z^n$, avec $a_n \in \mathbb{C}$. Elle est (abusivement) notée $\sum a_n z^n$.

Étant données deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$:

- La *série somme* de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est $\sum s_n z^n$ avec $s_n = a_n + b_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
- La *série produit* de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est $\sum p_n z^n$ avec, quel que soit $n \in \mathbb{N}$,

$$p_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\,.$$

- La *série dérivée* de $\sum a_n z^n$ est $\sum d_n z^n$ avec $d_n = (n+1)a_{n+1}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
- Une *série primitive* de $\sum a_n z^n$ est de la forme $\sum A_n z^n$ avec $A_n = a_{n-1}/n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$ (et A_0 arbitraire).

Lemme d'Abel Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite complexe $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée, alors quel que soit $z \in \mathbb{C}$ de *module* $|z| < |z_0|$, la série numérique $\sum a_n z^n$ *converge absolument*.

Rayon de convergence Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Le *rayon de convergence* de la série entière $\sum a_n z^n$ est $R = +\infty$ si l'ensemble $\{r \in \mathbb{R}^+ ;$ la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée$\}$ (qui contient 0) n'est pas majoré, tandis que si cet ensemble est majoré, $R := \sup\{r \in \mathbb{R}^+ ;$ la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée$\}$. De façon équivalente, $R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ ;\ (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $0\}$ (avec la convention $\sup A = +\infty$ pour une partie de $\mathbb{R}$ non majorée).

- Quel que soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$ la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument,
- Quel que soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$ la série numérique $\sum a_n z^n$ diverge (grossièrement).

On appelle *disque de convergence* d'une série entière le disque ouvert centré en 0 et de rayon R, son rayon de convergence. On appelle *cercle de convergence* le cercle centré en 0 et de rayon R. Attention, pour les nombres complexes z appartenant à ce cercle, la nature de la série numérique $\sum a_n z^n$ est indéterminée en général.

RÈGLE DE D'ALEMBERT Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang N, et si la suite $(|a_{n+1}/a_n|)_{n\geq N}$ a pour limite $\ell \in [0, +\infty]$, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est égal à $1/\ell$, avec par convention $1/+\infty = 0$, $1/0 = +\infty$.

RÈGLE DE CAUCHY Si la suite $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $\ell \in [0, +\infty]$, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est égal à $1/\ell$, avec la convention $1/+\infty = 0$ et $1/0 = +\infty$.

✓ Le rayon de convergence de la somme de deux séries entières est supérieur ou égal au plus petit de leurs rayons de convergence. Il est égal au plus petit des deux s'ils sont différents.

✓ Le rayon de convergence du produit de deux séries entières est supérieur ou égal au plus petit de leurs rayons de convergence.

✓ Le rayon de convergence d'une série entière et de sa série dérivée sont égaux.

Si deux séries numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont *absolument convergentes*, la *série produit* $\sum w_n$ définie par

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

est absolument convergente. De plus,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)\,.$$

C'est faux en général lorsque les séries ne sont pas absolument convergentes (le produit de deux séries convergentes peut être divergent).

NB: Il faut savoir *définir* les notions en *rouge* et démontrer les énoncés en bleu.

Si les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont pour rayons de convergence respectifs R_a et R_b, si s_n et p_n sont les coefficients de leur somme et de leur produit, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$ on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\,,$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

Une série entière *converge normalement* (et donc uniformément) sur tout *disque fermé*, et plus généralement sur tout *compact*, inclus dans son disque de convergence. Attention, la convergence uniforme n'a pas lieu sur le disque de convergence lui-même en général. La somme d'une série entière est *continue* dans son disque de convergence.

La somme d'une série entière de rayon de convergence non nul admet un *développement limité* à tout ordre au voisinage de zéro.

La somme d'une série entière est de *classe $\mathscr{C}^\infty$*.

Soit f la somme d'une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R \in]0, +\infty]$. Alors :

✓ Pour tout $x \in]-R, R[$,

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n\,.$$

✓ Si g est la somme de la série entière dérivée $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$, si $\varphi : I \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ et telle que $|\varphi(t)| < R$ pour tout $t \in I$, alors la fonction $f \circ \varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et sa dérivée est $g \circ \varphi \times \varphi'$.

✓ Quel que soit le segment $[a, b] \subset]-R, R[$,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right).$$

La fonction *exponentielle* $\exp : z \mapsto \mathrm{e}^z$, somme de la série entière $\sum z^n/n!$, de rayon de convergence infini, est telle que :

i). Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{\overline{z}}$.

ii). Quels que soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^{z_1 + z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\,\mathrm{e}^{z_2}$.

iii). Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\, z}$.

L'exponentielle définit un *morphisme surjectif* du *groupe* additif $\mathbb{C}$ sur le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$. La fonction $\theta \mapsto \mathrm{e}^{i\theta}$ est un morphisme continu surjectif du groupe additif $\mathbb{R}$ sur le groupe multiplicatif $\mathbb{U} = \{\mathrm{e}^{i\theta}\,;\ \theta \in \mathbb{R}\}$, de *noyau* $2\pi\mathbb{Z}$.

La dérivée de la restriction de exp à $\mathbb{R}$ est elle-même.

$$\boxed{\begin{array}{lll} \mathrm{e}^{i\theta} = 1 & \Leftrightarrow & \theta \in 2\pi\mathbb{Z}\,, \\ \mathrm{e}^{i\theta} = -1 & \Leftrightarrow & \theta \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}\,, \\ \mathrm{e}^{i\theta} = i & \Leftrightarrow & \theta \in \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}\,, \\ |z| = 1 & \Leftrightarrow & \dfrac{1}{z} = \overline{z}\,. \end{array}}$$

NB: Il faut savoir *définir* les notions en *rouge* et démontrer les énoncés en bleu.

Fonctions trigonométriques et hyperboliques

Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
\cos(z) &= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}\,,\\
\sin(z) &= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\,,\\
\mathrm{ch}(z) &= \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}\,,\\
\mathrm{sh}(z) &= \frac{e^{z}-e^{-z}}{2} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\,.
\end{aligned}$$

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos x = \mathrm{Re}(e^{ix})\,,\quad \sin x = \mathrm{Im}(e^{ix})\,.$$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$	$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$
$\cos' = -\sin$, $\sin' = \cos$	$\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$, $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$
$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$	$\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{cha}\mathrm{ch}b + \mathrm{sha}\mathrm{sh}b$
$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$	$\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sha}\mathrm{ch}b + \mathrm{cha}\mathrm{sh}b$
$\cos(z+\pi) = -\cos z$, $\cos(\pi/2 - z) = \sin z$	$\mathrm{ch}(z+i\pi) = -\mathrm{ch}z$, $\cos(i\pi/2 + z) = i\mathrm{sh}z$
$\sin(z+\pi) = -\sin z$, $\sin(\pi/2 - z) = \cos z$	$\mathrm{sh}(z+i\pi) = -\mathrm{sh}z$, $\mathrm{sh}(i\pi/2 + z) = i\mathrm{ch}z$

$\boxed{\cos(z) = 0 \iff z \in \pi/2 + \pi\mathbb{Z}}$ $\boxed{\sin(z) = 0 \iff z \in \pi\mathbb{Z}}$

$\boxed{\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \text{ pour } z \notin \pi/2 + \pi\mathbb{Z}\,,\quad \mathrm{cotan} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \tan(\pi/2 - z) \text{ pour } z \notin \pi\mathbb{Z},}$

$\boxed{\mathrm{ch}(z) = 0 \iff z \in i\pi/2 + i\pi\mathbb{Z}}$ $\boxed{\mathrm{sh}(z) = 0 \iff z \in i\pi\mathbb{Z}}$

$\boxed{\mathrm{th} z = \frac{\mathrm{sh} z}{\mathrm{ch} z} \text{ pour } z \notin i\pi/2 + i\pi\mathbb{Z}\,,\quad \mathrm{coth} z = \frac{\mathrm{ch} z}{\mathrm{sh} z} = \mathrm{th}(i\pi/2 + z) \text{ pour } z \notin i\pi\mathbb{Z}}$

$$\forall z\,,\ |z| < 1\,,\quad \frac{1}{(1-z)^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+n-1}{n-1} z^k\,.$$

$$\forall x \in]-1,1[,\quad \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n\,.$$

$$\forall x \in]-1,1[,\quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n\,.$$

NB: Il faut savoir *définir* les notions en *rouge* et démontrer les énoncés en bleu.

Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ contenant 0 est *développable en série entière en 0* s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$, de rayon de convergence $R > 0$ et $r \in]0, R[$ tels que, pour tout $z \in D(0; r) \cap U$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\,.$$

On dit qu'elle est *développable en série entière en z_0* $\in U$ si la fonction $w \mapsto f(z_0 + w)$ est développable en série entière en 0. Dans ce cas, on appelle *développement en série entière en z_0* de f la série $\sum a_n(z - z_0)^n$ telle que pour z voisin de z_0,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n\,.$$

Une fonction développable en série entière en chaque point d'un ouvert est dite *analytique* sur cet ouvert.

Une *fraction rationnelle* de pôles tous non nuls est développable en série entière en 0, et le rayon de convergence de cette série entière est égal au minimum des modules des pôles.

Une fonction développable en série entière en un point réel x_0 est de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de x_0 et son développement en série entière est sa *série de Taylor* en x_0, c'est-à-dire

$$\sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\,.$$

Une fonction f de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle ouvert I contenant 0 est développable en série entière en 0 si et seulement si la suite (T_n) définie par

$$T_n(x) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

converge simplement vers zéro sur un intervalle ouvert contenant 0 et inclus dans I.

Estimations de Cauchy. Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-a, a[$ avec $a > 0$ et s'il existe $\rho > 0$ et $M \geq 0$ tels que pour tout $x \in]-a, a[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{M n!}{\rho^n}\,,$$

alors f est développable en série entière en 0.

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \begin{cases} \arctan x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \\ \arcsin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ \mathrm{argth}\, x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \\ \mathrm{argsh}\, x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,. \end{cases}$$

NB: Il faut savoir *définir* les notions en *rouge* et démontrer les énoncés en bleu.