Dans ce qui suit, I et J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à des singletons, a et b sont des réels avec $a < b$.

Intégrales « ordinaires »

Continuité : si $f : I \times [a, b] \to \mathbb{C}$ est *continue* alors la fonction F définie ci-dessous est continue.

$$\boxed{\begin{array}{llll} F : & I & \to & \mathbb{C} \\ & x & \mapsto & F(x) = \displaystyle\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t \end{array}}$$

Dérivabilité : si $f : I \times [a, b] \to \mathbb{C}$ est continue et admet une *dérivée partielle* $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue, alors la fonction F définie ci-dessus est *de classe $\mathscr{C}^1$* et pour tout $x \in I$,

$$\boxed{F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t\,.}$$

Intégrales « ordinaires » à bornes variables

Continuité : Si la fonction $f : I \times J \to \mathbb{C}$est continue alors la fonction G définie ci-dessous est continue.

$$\boxed{\begin{array}{llll} G : & I \times J \times J & \to & \mathbb{C} \\ & (x,u,v) & \mapsto & G(x) = \displaystyle\int_u^v f(x,t)\mathrm{d}t \end{array}}$$

Dérivabilité : si $f : I \times J \to \mathbb{C}$ est continue et admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continue, si $u : I \to J$ et $v : I \to J$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ alors la fonction H définie ci-dessous est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\boxed{H'(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t \;+\; v'(x)\,f(x,v(x)) \;-\; u'(x)\,f(x,u(x))\,.}$$

$$\boxed{\begin{array}{llll} H : & I & \to & \mathbb{C} \\ & x & \mapsto & G(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\mathrm{d}t \end{array}}$$

Intégrales « généralisées »

Continuité : si $f : I \times J \to \mathbb{C}$ est continue et s'il existe une fonction $g : J \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux telle que $\int_J g(t)\mathrm{d}t < +\infty$ et $|f(x,t)| \leq g(t)$ pour tout $(x,t) \in I \times J$ (on dit que f est «*dominée*» par g), alors la fonction F définie ci-dessous est continue.

$$\boxed{\begin{array}{llll} \mathrm{F} : & I & \to & \mathbb{C} \\ & x & \mapsto & F(x) = \displaystyle\int_J f(x,t)\mathrm{d}t \end{array}}$$

Dérivabilité : sous les hypothèses précédentes, si de plus f admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continue, et s'il existe une fonction $h : J \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux telle que $\int_J h(t)\mathrm{d}t < +\infty$ et $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq h(t)$ pour tout $(x,t) \in I \times J$, alors la fonction F définie ci-dessus est dérivable et

NB: Il faut savoir *définir* les notions en *rouge* et démontrer les énoncés en bleu.

pour tout $x \in I$,

$$F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t\,.$$

Fonction Γ

Pour tout $x > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, et la fonction

$$\Gamma : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$, de dérivées données par

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k\, t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\,,\ k \in \mathbb{N}^*\,.$$

De plus, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En particulier, $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.