

Dans ce qui suit, I désigne un *intervalle* de \mathbb{R} d'« extrémités » α et β ($\alpha = \inf I$ et $\beta = \sup I$, avec la convention que $\inf A = -\infty$, respectivement $\sup A = +\infty$, si A est une partie non *minorée*, respectivement non *majorée* de \mathbb{R}). On suppose que I n'est pas un *segment*, c'est-à-dire que $\alpha \notin I$ ou $\beta \notin I$. Pour une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}) on notera indifféremment $\int_I f$ ou $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$: c'est une *intégrale généralisée*, qui n'a pas toujours un sens !

Fonctions positives Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ est *continue* alors on définit $\int_I f \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ par

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \lim_{x \nearrow \beta} F(x) - \lim_{x \searrow \alpha} F(x) \quad \text{où } F \text{ est une } \textit{primitive} \text{ (nécessairement } \textit{croissante}) \text{ de } f.$$

On dit que f est *intégrable* sur I si $\int_I f \in \mathbb{R}^+$, ce que l'on écrit aussi $\int_I f < +\infty$.

De façon équivalente, on a $\int_I f = \sup \left\{ \int_a^b f(t) dt ; a, b \in I, a < b \right\}$.

On a la *relation de Chasles* : pour tout $\gamma \in I$, $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\gamma} f(t) dt + \int_{\gamma}^{\beta} f(t) dt$.

Si J est un intervalle d'extrémités a et b , si $\varphi : J \rightarrow I$ est une *bijection strictement croissante* de *classe \mathcal{C}^1* ,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_a^b f(\varphi(u)) \varphi'(u) du \quad (\text{formule de } \textit{changement de variables}).$$

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ sont continues,

- quels que soient $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $\mu \in \mathbb{R}^+$, $\int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_I f + \mu \int_I g$;

- si $f \leq g$ alors $\int_I f \leq \int_I g$;

- on a l'*inégalité de Cauchy-Schwarz* : $\int_I fg \leq \left(\int_I f^2 \right)^{1/2} \left(\int_I g^2 \right)^{1/2}$.

Théorème de comparaison Soient $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ et $g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ continues. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $t \in [a, +\infty[$, $f(t) \leq Cg(t)$ (ce qui revient à demander $f = O(g)$: on lit « *f égal grand O de g* »).

Si g est intégrable sur $[a, +\infty[$ alors f aussi.

(Si f n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$ alors g non plus.)

Intégrales de Bertrand Soient des réels α, β , et $0 < a < 1 < b$.

La fonction $t \mapsto t^{-\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

La fonction $t \mapsto t^{-\alpha}$ est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $\alpha < 1$.

La fonction $t \mapsto t^{-\alpha} (\ln t)^{-\beta} dt$ est intégrable sur $[b, +\infty[$ si et seulement si : $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

La fonction $t \mapsto t^{-\alpha} |\ln t|^{-\beta} dt$ est intégrable sur $]0, a]$ si et seulement si : $\alpha < 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

Fonctions absolument intégrables Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue alors les fonctions suivantes le sont aussi : $|f| : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ $f^+ : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ $f^- : I \rightarrow \mathbb{R}^+$
 $t \mapsto |f(t)|$, $t \mapsto \max(f(t), 0)$, $t \mapsto \max(-f(t), 0)$.

On dit que f est *absolument intégrable* sur I si $\int_I |f| < +\infty$. Si c'est le cas, on définit

$$\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^- . \text{ On a } \left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|. \text{ De plus, si } F \text{ est une primitive de } f, \text{ elle admet}$$

$$\text{des } \textit{limites finies} \text{ en } \alpha \text{ et } \beta \text{ et } \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \lim_{x \nearrow \beta} F(x) - \lim_{x \searrow \alpha} F(x) .$$

- Si f et g sont absolument intégrables sur I alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ est absolument intégrable et $\int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_I f + \mu \int_I g$ (c'est la *linéarité* de l'intégrale).

- Si $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ est intégrable et $|f(t)| \leq \varphi(t)$ pour tout $t \in I$ alors f est absolument intégrable et $\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f| \leq \int_I \varphi$.

- Si f^2 et g^2 sont intégrables sur I alors fg est absolument intégrable sur I et

$$\int_I |fg| \leq \left(\int_I f^2 \right)^{1/2} \left(\int_I g^2 \right)^{1/2} \text{ (} \textit{inégalité de Cauchy-Schwarz} \text{)} .$$

Intégrales impropres Pour une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue, on dit que l'*intégrale impropre* $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$ *converge* si les primitives de f admettent des limites finies en α et β . Si c'est le cas,

$$\text{on pose } \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \lim_{x \nearrow \beta} F(x) - \lim_{x \searrow \alpha} F(x) =: [F]_{\alpha}^{\beta} \text{ où } F \text{ est une primitive de } f .$$

Si f est absolument intégrable sur I on dit que l'intégrale $\int_I f$ est *absolument convergente*. Les intégrales convergentes mais non absolument convergentes sont dites *semi-convergentes*.

- Si I est borné et si f est *bornée* sur I alors l'intégrale impropre $\int_I f$ converge (conséquence du *critère de Cauchy*).

- Si $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$ converge et $c \in]\alpha, \beta[$ alors $\int_{\alpha}^c f(t) dt$ et $\int_c^{\beta} f(t) dt$ convergent et

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha}^c f(t) dt + \int_c^{\beta} f(t) dt \text{ (} \textit{relation de Chasles} \text{)} .$$

- Si $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$ converge et si $\varphi : J \rightarrow I$ est une bijection strictement croissante, de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle J d'extrémités a et b , alors l'intégrale impropre $\int_a^b f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$ converge et

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_a^b f(\varphi(u)) \varphi'(u) du \text{ (formule de } \textit{changement de variables} \text{)} .$$

- Si $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe \mathcal{C}^1 , si $\int_{\alpha}^{\beta} u'(t) v(t) dt$ converge et si uv admet des limites finies en α et β alors $\int_{\alpha}^{\beta} u(t) v'(t) dt$ converge et

$$\int_{\alpha}^{\beta} u(t) v'(t) dt = - \int_{\alpha}^{\beta} u'(t) v(t) dt + [uv]_{\alpha}^{\beta} \text{ (formule d'} \textit{intégration par parties} \text{)} .$$

Théorème de comparaison Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in]a, +\infty[\cup \{+\infty\}$, $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}^+$ continues.

- Supposons que $\int_a^b g(t) dt = +\infty$:
 - si $f = O(g)$ en b alors $\int_a^x f(t) dt = O\left(\int_a^x g(t) dt\right)$ quand $x \rightarrow b$.
 - si $f = o(g)$ en b alors $\int_a^x f(t) dt = o\left(\int_a^x g(t) dt\right)$ quand $x \rightarrow b$.
 - si $f \sim g$ en b et f est à valeurs positives alors $\int_a^x f(t) dt \sim \int_a^x g(t) dt$ quand $x \rightarrow b$.
- Supposons au contraire que $\int_a^b g(t) dt < +\infty$:
 - si $f = O(g)$ en b alors $\int_x^b f(t) dt = O\left(\int_x^b g(t) dt\right)$ quand $x \rightarrow b$.
 - si $f = o(g)$ en b alors $\int_x^b f(t) dt = o\left(\int_x^b g(t) dt\right)$ quand $x \rightarrow b$.
 - si $f \sim g$ en b et f est à valeurs positives alors $\int_x^b f(t) dt \sim \int_x^b g(t) dt$ quand $x \rightarrow b$.