Dans ce qui suit, a, b, c, d sont des réels avec $a < b$ et $c < d$.
Théorème de Fubini Si $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ est *continue* alors

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y\,.$$

Ce théorème est encore vrai si les applications partielles $x \mapsto f(x,y)$ et $y \mapsto f(x,y)$ sont *continues par morceaux*, ainsi que $x \mapsto \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$ et $y \mapsto \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$. Si c'est le cas, on définit l'intégrale double de f sur $R := [a,b] \times [c,d]$ par

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y := \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y\,.$$

En particulier, pour une *fonction à variables séparées* $(x,y) \mapsto g(x)h(y)$, avec g et h des fonctions continues par morceaux respectivement sur $[a,b]$ et $[c,d]$, on a

$$\iint_R g(x)h(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left(\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \right) \left(\int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y \right)\,.$$

On dit que $D \subset \mathbb{R}^2$ est un *domaine élémentaire* de $\mathbb{R}^2$ s'il existe a, b, c, d avec $a < b$, $c < d$, et des fonctions continues $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\psi_1, \psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$, tels que

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ a \leqslant x \leqslant b\,,\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ c \leqslant y \leqslant d\,,\ \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)\}\,.$$

Si $f : D \to \mathbb{R}$ est continue sur D, on a

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

et ce nombre définit $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. En particulier pour $f \equiv 1$,

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b (\varphi_2(x) - \varphi_1(x))\,\mathrm{d}x = \int_c^d (\psi_2(y) - \psi_1(y))\,\mathrm{d}y$$

est l'*aire* de D.

Un *compact* K de $\mathbb{R}^2$ est appelé *compact simple* si c'est la réunion d'un nombre fini de domaines élémentaires dont les intérieurs sont deux à deux disjoints. Si $f : K \to \mathbb{R}$ est continue sur un compact simple $K = \cup_{k=1}^n D_k$ (où les D_k sont des domaines élémentaires), on définit

$$\iint_K f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{k=1}^n \iint_{D_k} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Changement de variables Si $K \subset U$ est un compact simple inclus dans un *ouvert* U, si $\phi : U \to V$ est un *$\mathscr{C}^1$-difféomorphisme*, si $f : K \to \mathbb{R}$ est continue alors

$$\boxed{\iint_{\phi(K)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_K f(\phi(u,v))\,|\mathrm{dét} J_\phi(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}$$

où $J_\phi(u,v)$ désigne la *matrice jacobienne* de ϕ au point (u,v). On appelle *jacobien* de ϕ au point (u,v) le nombre $\mathrm{dét} J_\phi(u,v)$.
Coordonnées polaires Si $0 < a < b$ et $\theta_1 < \theta_2 < \theta_1 + 2\pi$,

$$D = \{(x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)\,;\ a \leqslant r \leqslant b\,,\ \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2\}$$

est un domaine élémentaire et si une fonction f est continue sur D alors

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\,.$$

NB: Il faut savoir *définir* les notions en *rouge* et démontrer les énoncés en bleu.