Dans ce qui suit, E est un *$\mathbb{K}$-espace vectoriel* avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une *norme* sur E est une application $N : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant

i). axiome de séparation : $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0_E$.

ii). homogénéité : $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.

iii). *inégalité triangulaire* : $\forall (x, y) \in E \times E,\ N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

L'inégalité triangulaire implique que : $\forall (x, y) \in E \times E,\ |N(x) - N(y)| \leq N(x + y)$.
Si N est une norme sur E alors l'application $d : (x, y) \in E \times E \mapsto d(x, y) := N(x - y)$ est une *distance*, c'est-à-dire qu'elle vérifie

✓ l'axiome de séparation : $\forall x, y \in E,\ d(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = y$.
✓ la propriété de symétrie : $\forall x, y \in E,\ d(x, y) = d(y, x)$.
✓ l'inégalité triangulaire : $\forall x, y, z \in E,\ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Si E est muni d'une norme N, on dit que c'est un *espace vectoriel normé*. Une partie A de E est *bornée* s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $N(a) \leq M$ pour tout $a \in A$. Le *diamètre* d'une partie bornée A est

$$\operatorname{diam} A := \sup\{d(a, b) = N(b - a)\,;\ (a, b) \in A \times A\}\,.$$

Si $x \in E$ et $r \in \mathbb{R}^{+*}$, la *boule ouverte*, la *boule fermée* et la *sphère* de *centre* x et de *rayon* r sont les ensembles bornés de diamètre $2r$ respectivement définis par

$$B(x; r) := \{y \in E\,;\ d(y, x) = N(y - x) < r\}\,, \quad \overline{B}(x; r) := \{y \in E\,;\ d(y, x) = N(y - x) \leq r\}\,,$$

$$S(x; r) := \{y \in E\,;\ d(y, x) = N(y - x) = r\}\,.$$

Noter que $\overline{B}(x; r) = B(x; r) \cup S(x; r)$.

Deux normes N_1 et N_2 sur un même espace E sont *équivalentes* si

$$\exists C > 0\,; \quad \forall x \in E\,,\ \tfrac{1}{C} N_1(x) \leq N_2(x) \leq C N_1(x)\,,$$

ce qui équivaut encore à :

$$\exists C_1,\ C_2 > 0\,; \quad \forall x \in E\,,\ C_1 N_1(x) \leq N_2(x) \leq C_2 N_1(x)\,.$$

Si E est de *dimension finie*, toutes les normes sont équivalentes (admis pour l'instant). C'est faux en dimension infinie.

Normes classiques sur $\mathbb{R}^n$

- La *valeur absolue* définit une norme sur $\mathbb{R}$. Le *module* définit une norme sur $\mathbb{C}$.
- Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on note

$$\|x\|_1 := \sum_{j=1}^{n} |x_j|\,, \quad \|x\|_2 := \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}\,, \quad \|x\|_\infty := \max\{|x_j|\,,\ j \in \{1, \ldots, n\}\}\,.$$

L'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_2$, appelée *norme eucidienne*, résulte de l'*inégalité de Cauchy–Schwarz* : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\,,\ |(x \cdot y)| \leq \|x\|_2\,\|y\|_2\,$, où $(x \cdot y)$ est le *produit scalaire* de x et y, défini par $(x \cdot y) := \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$ si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n\,,\ \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty\,,\ \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty\,,\ \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2}$$

Normes analogues sur $\mathbb{C}^n$ Pour $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ on note

$$\|z\|_1 := \sum_{j=1}^{n} |z_j|\,, \quad \|z\|_2 := \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2}\,, \quad \|z\|_\infty := \max\{|z_j|\,,\ j \in \{1, \ldots, n\}\}\,.$$

NB: Il faut savoir *définir* les notions en *rouge* et démontrer les énoncés en bleu.

Normes classiques en dimension infinie Sur l'espace vectoriel des suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ bornées, on définit une norme par :

$$\|(u_n)\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| .$$

Sur l'espace vectoriel des suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum u_n$ est absolument convergente, on définit une norme par :

$$\|(u_n)\|_1 := \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| .$$

Sur l'espace vectoriel $\mathscr{C}([a,b];\mathbb{R})$ des fonctions f continues sur le segment $[a,b]$ (avec $a<b$), on définit les normes suivantes :

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)| \mathrm{d}t , \quad \|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b f(t)^2 \mathrm{d}t} , \quad \|f\|_\infty := \max_{t\in[a,b]} |f(t)| .$$

Espaces produits Si $(E_1,\dots,E_d)$ est une famille d'espaces vectoriels normés munis respectivement de normes N_1, ..., N_d, on définit sur le *produit cartésien* $E_1\times\cdots\times E_d$ les normes équivalentes suivantes : pour $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_d) \in E$,

$$\|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{j=1}^n N_j(\mathbf{x}_j) , \quad \|\mathbf{x}\|_2 := \sqrt{\sum_{j=1}^n N_j(\mathbf{x}_j)} , \quad \|\mathbf{x}\|_\infty := \max\{N_j(\mathbf{x}_j) \,,\, j\in\{1,\dots,n\}\} .$$

Suites et séries dans les espaces vectoriels normés Si E est un espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$, une *suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ d'éléments de E (c'est-à-dire une application de $\mathbb{N}$ dans E) est :

- *bornée* si la suite numérique $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est majorée, ou de façon équivalente s'il existe une boule contenant tous les termes x_n ;
- *convergente* s'il existe $\ell\in E$ tel que : $\boxed{\forall\varepsilon>0 \,,\ \exists N\in\mathbb{N} \,, \forall n\geq N \,,\ \|x_n-\ell\|\leq\varepsilon}$.
  Dans ce cas, ℓ est appelé *limite* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on a
  $\boxed{\ell=\lim(x_n) \quad\Leftrightarrow\quad 0_E=\lim(x_n-\ell) \quad\Leftrightarrow\quad 0=\lim(\|x_n-\ell\|)}$.

Une suite bornée pour $\|\cdot\|$ l'est aussi pour toute norme équivalente à la norme $\|\cdot\|$.
Une suite convergente pour $\|\cdot\|$ l'est aussi pour toute norme équivalente à la norme $\|\cdot\|$.
La limite d'une suite convergente est unique, et ne change pas si l'on change $\|\cdot\|$ pour une norme équivalente. Toute suite convergente est bornée. La réciproque est fausse.
L'ensemble des suites convergentes est un *sous-espace vectoriel* de $E^{\mathbb{K}}$, et si on le note $E^{\mathbb{K}}_{\mathrm{cv}}$, l'application suivante est *linéaire* : $\begin{array}{ccc} E^{\mathbb{K}}_{\mathrm{cv}} & \to & E \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \lim(x_n) . \end{array}$

Une série $\sum x_n$ est *convergente* si, en posant $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_n$ pour tout n, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Critère de Cauchy Toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ convergente est de Cauchy, c'est-à-dire que :
$\boxed{\forall\varepsilon>0 \,,\ \exists N\in\mathbb{N} \,, \forall n\geq N \,, \forall p\in\mathbb{N} \,,\ \|x_n-x_{n+p}\|\leq\varepsilon}$.

Dans un espace vectoriel de *dimension finie*, une suite est convergente si et seulement si elle de Cauchy.
En particulier, une série $\sum x_n$ est convergente si et seulement si :

$\boxed{\forall\varepsilon>0 \,,\ \exists N\in\mathbb{N} \,, \forall n\geq N \,, \forall p\in\mathbb{N} \,,\ \left\|\sum_{k=n}^{n+p} x_k\right\|\leq\varepsilon}$. C'est faux en dimension infinie en général.

NB: Il faut savoir *définir* les notions en *rouge* et démontrer les énoncés en bleu.

Théorème de Bolzano–Weierstrass Dans un espace vectoriel normé de *dimension finie*, toute suite bornée admet une *sous-suite* convergente. (C'est faux en dimension infinie.)

Notions topologiques

• VOISINAGES • Une partie V d'un espace vectoriel normé E est un *voisinage* d'un élément x de E si et seulement si : $\exists r > 0\,,\ \overline{B}(x;r) \subset V$.
Une boule ouverte $B(x;\rho)$ ou fermée $\overline{B}(x;\rho)$ de rayon $\rho > 0$ est un voisinage de son centre x.
Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$ si et seulement si :
$\boxed{\forall V \text{ voisinage de } \ell\,,\ \exists N \in \mathbb{N}\,, \forall n \geq N\,,\ x_n \in V}$.

• OUVERTS • Une partie U de E est un *ouvert* si et seulement si : $\forall x \in U\,, \exists r > 0\,,\ \overline{B}(x;r) \subset U$.
L'ensemble vide $\varnothing$, l'espace entier E, et toutes les boules ouvertes sont des ouverts. Les boules fermées ne sont pas des ouverts. Toute *réunion* d'ouverts est un ouvert. L'*intersection* d'un *nombre fini* d'ouverts est un ouvert.
• FERMÉS • Une partie F de E est un *fermé* si et seulement si son *complémentaire* $E\backslash F$ est ouvert.
L'ensemble vide $\varnothing$, l'espace entier E, tous les singletons et toutes les boules fermées sont des fermés.
Toute intersection de fermés est un fermé. La réunion d'un *nombre fini* de fermés est un fermé.
Une partie A de E est un fermé si et seulement si, pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ d'éléments de A convergente, on a $\lim(a_n) \in A$.
• INTÉRIEUR • L'*intérieur* d'une partie A de E est l'ensemble $\mathring{A} = \{x \in E\,;\ \exists r > 0\,,\ \overline{B}(x;r) \subset A\}$.
C'est le plus grand ouvert inclus dans A.
L'intérieur d'une boule fermée $\overline{B}(x;\rho)$ est la boule ouverte $B(x;\rho)$. L'intérieur d'une sphère est vide, de même que celui d'un sous-espace vectoriel $F \neq E$.
• ADHÉRENCE • L'*adhérence* de A est l'ensemble $\bar{A} = \{x \in E\,;\ \forall r > 0\,,\ \overline{B}(x;r) \cap A \neq \varnothing\}$. C'est le plus petit fermé contenant A, ou encore $\bar{A} = \{x \in E\,;\ \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}\,,\ \lim(a_n) = x\}$.
L'adhérence d'une boule ouverte $B(x;\rho)$ est la boule fermée $\overline{B}(x;\rho)$.
• COMPACTS • Une partie A d'un espace vectoriel normé E est un *compact* si et seulement si toute suite de A admet une sous-suite convergente dont la limite appartient à A.
Tout compact est fermé et borné. En particulier, un sous-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ n'est pas compact.
Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, tout ensemble fermé et borné est compact. En particulier, tout segment $[a, b]$ (avec $a < b$) de $\mathbb{R}$ est compact, les compacts de $\mathbb{R}^d$ sont les fermés bornés.

Fonctions entre espaces vectoriels Une *fonction* $f : A \to F$, où $A \subset E$, E et F étant des espaces vectoriel normés, a pour limite $\ell \in F$ en $x_0 \in \overline{A}$ si et seulement si l'une quelconque des propriétés suivantes est satisfaite :

- $\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\,, \forall x \in E\,,\ \|x - x_0\|_E \leq \eta \implies \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon\,.$
- $\forall V$ voisinage de $\ell\,,\ \exists W$ voisinage de $x_0\,, \forall x \in A\,,\ x \in W \Longrightarrow f(x) \in V\,.$
- $\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $x_0\,,\ (f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell\,.$

La fonction f est *continue* en $a \in A$ si elle a pour limite $f(a)$ en a. Elle est continue sur A si elle l'est en tout élément de A.
Toute fonction *Lipschitzienne* (c'est-à-dire telle que : $\exists k > 0\,,\ \forall x, y \in A\,,\ \|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E$) est continue. En particulier, la norme $N : x \in E \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}$ est continue.
La *composée*, $g \circ f : A \to G$, de deux fonctions continues, $f : A \to F$ et $g : B \to G$ avec $f(A) \subset B$, est continue.
La fonction *réciproque* d'une fonction continue bijective n'est pas nécessairement continue.

La somme de deux fonctions continues est continue. Le produit d'une fonction *scalaire* continue avec une fonction (vectorielle) continue est continu. L'ensemble des fonctions continues de A dans E forme un espace vectoriel.
La continuité d'une application *linéaire* $u = E \to F$ est caractérisée par l'une quelconque des propriétés suivantes (qui sont donc toutes équivalentes) :

- il existe $k > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|_F \leq k\|x\|_E$,
- l'application u est Lipschitzienne,
- l'application u est continue en 0_E,
- l'application u est bornée sur la boule fermée unité $\overline{B}(0; 1)$.

Sur l'espace vectoriel $\mathscr{L}_c(E; F)$ des applications linéaires continues de E dans F, on définit la *norme subordonnée* à celles de E et F par

$$\begin{array}{ccl} \mathscr{L}_c(E;F) & \to & \mathbb{R}^+ \\ u & \mapsto & |||u||| = \sup\{\|u(x)\|_F \,;\ \|x\|_E \leq 1\} \end{array}$$

Si E est un espace vectoriel de dimension finie, toutes les applications linéaires $E \to F$ sont continues. C'est faux si E n'est pas de dimension finie.
Si G est aussi un espace vectoriel normé, une application *bilinéaire* $\phi : E \times F \to G$, c'est-à-dire telle que les applications $x \in E \mapsto \phi(x, y_0) \in G$ et $y \in F \mapsto \phi(x_0, y) \in G$ sont linéaires quels que soient $x_0 \in E$ et $y_0 \in F$, est continue si et seulement si :
$\boxed{\exists k > 0\,, \quad \forall (x,y) \in E \times F\,, \quad \|\phi(x,y)\|_G \leq k\|x\|_E \times \|y\|_F}$.
L'*image* $f(K)$ d'un compact K par une fonction continue f est un compact.