Feuille exercice n°5
Applications linéaires

Exercice 1 : Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires ? Si oui, préciser leur noyau.

$f_1 : \boldsymbol{R^2} \to \boldsymbol{R^2} \quad : f_1(x,y) = (2x+y, x-y)$ $\qquad f_4 : \boldsymbol{R^2} \to \boldsymbol{R} \quad : f_4(x,y) = x^2 + y^2$

$f_2 : \boldsymbol{R^2} \to \boldsymbol{R} \quad : f_2\,(x,y) = x+y$ $\qquad f_5 : \boldsymbol{R^3} \to \boldsymbol{R^3} : f_5\,(x,y,z) = (y,z,x)$

$f_3 : \boldsymbol{R^2} \to \boldsymbol{R^3} : f_3\,(x,y) = (x,y,x+y)$ $\qquad f_6 : \boldsymbol{R^2} \to \boldsymbol{R^2} : f_6\,(x,y) = (2x+y, -4x-2y)$

Exercice 2 : Soient E et F deux espaces vectoriels sur le corps K et f une application linéaire de E dans F.
Prouver que f(0) = 0.
Démontrer que Ker f est un sous espace vectoriel de E.
Démontrer que Im f est un sous espace vectoriel de F.

Exercice 3 : Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, de base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, et F un K-espace vectoriel quelconque. Soit f une application linéaire de E dans F.
Montrer que Imf = Vect $(f(e_1), f(e_2), \ldots, f\,(e_n))$.
Ce résultat est très utile quand on cherche une base de Im f: pourquoi ?

Exercice 4 : Dans chaque cas suivant , déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire E :
1 – E étant un K -EV de base $(e_1, e_2\,, e_3)$, g est l'endomorphisme défini par
$g(e_1) = e_1 - e_2\;,\; g(e_2) = -e_1 + e_2\;,\; g(e_3) = 0$.
2 - E étant un K -EV de base $(e_1, e_2\,, e_3)$, g est l'endomorphisme défini par
$g(e_1) = e_2\;,\; g(e_2) = e_3\;,\; g(e_3) = e_1 + e_2$
3 - E étant un K -EV de base $(e_1, e_2\,, e_3\,, e_4)$ et F étant un K -EV de base (e'_1, e'_2) , g est l'application linéaire définie par : $g(e_1) = e'_1\;,\; g(e_2) = e'_1 + e'_2\;,\; g(e_3) = e'_2\;,\; g(e_4) = e'_1 - e'_2$

Exercice 5 : Soit $\boldsymbol{R}^4$, muni de sa base canonique. On définit l'application f par :
$f\big((\alpha,\beta,\gamma,\delta)\big) = (4\alpha + 2\gamma + 4\delta, 0\,, 2\alpha + \gamma + 2\delta\,, 4\alpha + 2\gamma + 4\delta\,)$.
1 – Montrer qu'il s'agit d'un endomorphisme de $\boldsymbol{R}^4$.
2 – Déterminer une base de Im f ; en déduire Dim Ker$f$ puis une base de Ker$f$.
3 – A-t-on $\boldsymbol{R}^4 = Kerf \oplus Imf$?

Exercice 6 : soit E un espace vectoriel de base $(e_1, e_2\,, e_3)$. On définit l'endomorphisme de E par
$f\,(e_1) = \frac{1}{2}(e_1 - e_2)$; $f\,(e_2) = -\frac{1}{2}(e_1 - e_2)$; $f\,(e_3) = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + 2e_3)$;
1 – Calculer $f(x)$ pour x vecteur quelconque de E.
2 – Calculer $fof(x)$.
3 – Montrer que $E = Kerf \oplus \mathrm{Im}\; f$
4 – Comment obtenir une nouvelle base de E , $(a_1, a, , a_3)$, dans laquelle

$$f(a_1) = 0, f(a_2) = a_2\;,\; f(a_3) = a_3$$

Exercice 7 Pour la fonction f_6 de l'exercice 1,a-t-on $\boldsymbol{R}^2 = Ker f_6 \oplus \operatorname{Im} f_6$?

Exercice 8 : Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. On note $f^2 = fof$.

Montrer

a - $Kerf = Kerf^2 \iff Kerf \cap Imf = \{0\}$

b - $Kerf = Kerf^2 \iff Imf = Imf^2$

c - $Kerf = Kerf^2 \iff$ E = $Kerf \oplus Imf$

d – Soit f: $\boldsymbol{R^3} \to \boldsymbol{R^3}$ l'endomorphisme défini par : $\forall (x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R^3}$,

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - x_2 + x_3 , 4x_1 - x_2 + 2x_3 , -2x_1 + x_2)$$

La base canonique de $\boldsymbol{R^3}$ étant notée (e_1, e_2, e_3), calculer pour $1 \leq i \leq 3$, $f(e_i)$ et $fof(e_i)$.

En conclure $\boldsymbol{R^3} = Kerf \oplus Imf$ et préciser leur dimension.

Exercice 9 : Soit f une application linéaire du K- espace vectoriel E dans le K-espace vectoriel F.

1 -Montrer que f est injective $\Leftrightarrow Kerf = \{0\}$.

2 -Supposons de plus que Dim E =Dim F= n . Montrer que f est injective $\Leftrightarrow$ f est bijective .

Exercice 10 : Soit f une application linéaire du K- espace vectoriel E dans le K-espace vectoriel F, de dimensions finies.

1 - Montrer que f est injective $\Leftrightarrow$ elle transforme une famille libre de E en une famille libre de F.

2 -Montrer que f est surjective $\Leftrightarrow$ elle transforme une famille génératrice de E en une famille génératrice de F.

3 - Montrer que f est un isomorphisme $\Leftrightarrow$ elle transforme une base de E en une base de F.

4 – Montrer qu'il existe un isomorphisme de E dans F $\Leftrightarrow$ DimE = Dim F.

Exercice 11 : Soit E=R^N le **R**-espace vectoriel des suites réelles. On considère le sous- espace vectoriel F des suites qui vérifient $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, pour tout n ≥ 0 .

Montrer qu'il existe un isomorphisme de F sur R^2 défini par $f((a_n))=(a_0 , a_1)$. En déduire dim F=2.

Exercice 12 : Soit E un R-espace vectoriel de base notée (e_1, e_2, e_3).

On considère l'endomorphisme g de E défini par

$g(e_1) = 2e_1 + e_2 + e_3$; $g(e_2) = e_1 + 2e_2 + e_3$; $g(e_3) = e_1 + e_2 + 2e_3$.

1 - Montrer que c'est un automorphisme de E.

2 -Montrer que $gog = 5g - 4i$ où i désigne l'application identique de E.

3 – En déduire l'application réciproque de g .

4 – Monter par récurrence sur n que , pour tout n ≥ 0 , il existe $(a_n , b_n) \in R^2$ tel que $g^n = a_n g + b_n i$. (on note $g^n = gogog \dots og$, n itérations)

5 – Soient $v_1 = e_1 + e_2 + e_3$; $v_2 = e_1 - e_2$; $v_3 = e_1 - e_3$. Montrer que ces 3 vecteurs forment une nouvelle base de E.

6 – Exprimer $g(v_1)$, $g(v_2)$; $g(v_3)$ en fonction de la nouvelle base . En déduire pour $1 \leq i \leq 3$ $g^n(v_i)$.

7 – En déduire les (a_n , b_n) de la question 4.

Exercice 13 : Soit E un R- EV de dimension 3 . Soit g un endomorphisme de E tel que $g^2 \neq 0$ et $g^3 = 0$.
1 – montrer que Dim Ker g ne peut être égal ni à 0 ni à 3.
2 – Supposons ici Dim Ker g =2 : montrer qu'alors Ker g = Ker gog puis que $g^2 = 0$. Conclure.

Exercice 14 : Soit E un R-EV et $\mathcal{L}(E)$ le R -EV de ses endomorphismes , i étant l'application identique.
Soit g un endomorphisme de E tel que $g^2 \neq 0$ et $g^3 = 0$. Soit $x_0 \in$ E tel que $g^2(x_0) \neq 0$.
1 – Montrer que $(x_0 , g(x_0), g^2(x_0))$ est une base de E.
2 – Montrer que tous les endomorphismes de E qui commutent avec g forment un sous espace vectoriel $\mathcal{F}$ de $\mathcal{L}(E)$.
3 – Montrer que ce sous espace vectoriel admet pour base (i , g , g^2) .

Exercice 15 : Soit E un R-EV de dimension n et $g \in \mathcal{L}(E)$.
1 – Montrer que $\{0\} \subset Kerg \subset Kerg^2 \subset .... \subset Kerg^p$, $\forall\, p \in N^*$.
2 – Montrer que , si pour un entier m $Ker\ g^m = Ker\ g^{m+1}$, alors $Ker\ g^{m+1} = Ker\ g^{m+2}$.
On suppose qu'il existe k$\in N$ tel que g^k=0 :
3 - Montrer que g^n=0.

Exercice 16 : Soient E et F deux K- EV de dimensions finies , u et v deux éléments de $\mathcal{L}$(E,F).
Montrer que rg (u+v) $\leq$ rg(u) + rg(v). En déduire que | rg(u) – rg(v) | $\leq$ rg(u+v) .

Exercice 17 : Soit E un K-EV de dimension finie n et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$.
On suppose $f + g$ inversible et $fog = 0$: montrer que rg (f) +rg(g) = n . (on pourra utiliser l'ex 16).

Exercice 18 : Soit E un K-EV de dimension finie n et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$.
-Montrer que rg ($f\ o\ g$) $\leq Inf$ (rg (f), rg (g))
-Montrer que rg (f)+ rg (g) -n $\leq$ rg ($f\ o\ g$) [on pourra utiliser le noyau de l'application g restreinte à Ker fog].

Exercice 19 : Soit E un R-EV et $p \in \mathcal{L}(E)$. On dit que p est un projecteur si $pop = p$.
1 – Montrer que p est un projecteur ssi $i - p$ est un projecteur. (i est l'application identique de E dans E).
2 – Soit p un projecteur de E .Montrer que $Kerp = Im\ (i - p)$; $Im\ p = Ker\ (i - p)$; E = $Kerp \oplus Imp$.
3 – Soient p et q deux projecteurs de E.

a) Montrer que $p + q$ est un projecteur ssi $poq + qop$ =0 ssi $poq = qop = 0$.
b) Lorsqu'il en est ainsi ,montrer que $Im(p + q) = Imp + Imq$ et $Ker(\ p + q) = Kerp \cap Kerq$.
c) Montrer que si $poq = qop$ alors poq est un projecteur et :

$$Im(poq) = Imp \cap Imq \quad \text{et} \quad Ker\ poq = Kerp + Ker\ q$$

Exercice 20 : Soit E un R-EV et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = f + 2i$ c'est-à-dire que pour tout vecteur v de E

$$f\big(f(v)\big) = f(v) + 2v$$

Montrer que E = $Ker(f + i) \oplus Ker(f - 2i)$.