## Une dernière couche de primitives et intégrales

**Exercice 127**
En invoquant correctement les "règles de Bioche" calculer les primitives ou intégrale suivantes :

$$1)\quad \int \frac{dx}{\cos x + \cos 3x} \qquad 2)\quad \int \frac{\cos 2x}{\sin x + \sin 3x}\,dx \qquad 3)\quad \int_0^{3\pi} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x + \sin^4 x}\,dx$$

**Exercice 128**
On note $I$ et $J$ les deux intégrales respectives :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\cos x \sin x}} \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+\cos x \sin x}}.$$

1) Montrer que $I = J$.
2) Calculer $I + J$ en y effectuant le changement de variables $y = x - \frac{\pi}{4}$ puis en déduire la valeur de $I = J$.

**Exercice 129**
En introduisant une nouvelle variable liée à $x$ par une fonction trigonométrique ou trigonométrique hyperbolique, calculer :

$$1)\quad \int \frac{dx}{(1-x^2)^{5/2}} \qquad 2)\quad \int \frac{x^2}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}\,dx.$$

## Sommes de Riemann

**Exercice 130**
Déterminer les limites évenuelles des suites suivantes :
1) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}$.  2) $u_n = \displaystyle\frac{1}{n^3}\sum_{k=2}^{n-1} k^2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
3) $\alpha$ et $\beta$ étant deux réels strictement positifs donnés,

$$u_n = \frac{1}{n\alpha} + \frac{1}{n\alpha+\beta} + \frac{1}{n\alpha+2\beta} + \cdots + \frac{1}{n\alpha+(n-1)\beta}.$$

4) $u_n = \displaystyle\frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{1/n}$.  5) $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k^2+n^2}$ puis $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k+\cos k}{k^2+n^2}$.

**Exercice 131**
1) Soit $n \geq 1$. Montrer dans $\mathbf{C}[X]$ l'identité polynomiale suivante :

$$\prod_{p=1}^{n} (X - e^{2i\pi p/n}) = X^n - 1.$$

2) Montrer que pour tout $\alpha$ complexe et tout $n \geq 1$ :

$$\prod_{p=1}^{n} \left(1 - 2\alpha \cos\frac{2\pi p}{n} + \alpha^2\right) = (\alpha^n - 1)^2.$$

3) Soit $\alpha$ un réel strictement positif et différent de 1. En l'approchant par une suite de sommes de Riemann, calculer l'intégrale :

$$\int_0^{2\pi} \ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\,dx.$$

**Divisibilité et division euclidienne**

**Exercice 132**
Pour chacun des polynômes suivantes, dresser la liste complète des polynômes qui le divisent dans l'anneau de polynômes précisé :
1) $X+1$ dans $\mathbf{R}[X]$
2) $X^2-1$ dans $\mathbf{R}[X]$
3) $X^2+1$ dans $\mathbf{C}[X]$
4) $X^2+1$ dans $\mathbf{R}[X]$.

**Exercice 133**
Montrer que le reste de la division euclidienne d'un polynôme $P$ par le polynôme $X-a$ est égal à la valeur $P(a)$.

**Exercice 134**
Soit $a$ et $b$ deux réels distincts, et $P$ un polynôme de $\mathbf{R}[X]$. On note $\lambda$ et $\mu$ les restes respectifs des divisions euclidiennes de $P$ par $X-a$ et par $X-b$. Exprimer à l'aide de $\lambda$ et $\mu$ le reste de la division euclidienne de $P$ par $(X-a)(X-b)$. Qu'a-t-on montré dans le cas particulier où $\lambda=\mu=0$ ? Pourquoi ne peut-on rien conclure quand $a=b$ ?

**Exercice 135**
Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 1.

1) Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^{5n}$ par $X^5-1$.

2) En déduire le reste de la division euclidienne de $X^{99}+2X^{32}-3X^{25}-2X^7+3$ par $X^5-1$.

**Exercice 136**
Soit $a$ un réel et $n$ un entier supérieur ou égal à 1. On note $A=(X\sin a+\cos a)^n$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $A$ par $X^2+1$.

**PGCD, algorithme d'Euclide, définition des racines**

**Exercice 137**
En utilisant l'algorithme d'Euclide, trouver une relation de Bézout entre les polynômes $X^3+1$ et $X^4+1$, considérés comme à coefficients rationnels.

**Exercice 138**
Soit $A$, $B$ et $C$ trois polynômes de $\mathbf{K}[X]$. Montrer que si $A$ divise $C$, $B$ divise $C$ et $A$ est premier avec $B$, alors $AB$ divise $C$.

**Exercice 139**
Montrer que le polynôme $X^{163}-24X^{57}-6$ possède au moins une racine réelle, mais ne possède pas de racine rationnelle.

**L'espace vectoriel des polynômes**

**Exercice 140**
Pour chacune des applications qui suit, dites (et justifiez !) si elle est ou non linéaire :

1) $f\colon \mathbf{R}[X]\to\mathbf{R}[X]$ définie par $f(P)=2PP'$ (pour $P\in\mathbf{R}[X]$).

2) $f\colon \mathbf{R}[X]\to\mathbf{R}_3[X]$ définie par : "$f(P)$ est le reste de la division euclidienne de $P$ par $X^4-5X+2$" (pour $P\in\mathbf{R}[X]$) ; (selon l'usage la notation $\mathbf{R}_3[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 3).

**Exercice 141**
On note $\mathbf{R}_3[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.
On considère l'endomorphisme $u$ de $\mathbf{R}_3[X]$ défini par :

$$u(P)=(1-X^2)P''-XP' \qquad \text{pour tout polynôme } P \text{ de } \mathbf{R}_3[X].$$

1) Écrire la matrice de $u$ dans la base canonique $(1,X,X^2,X^3)$ de $\mathbf{R}_3[X]$.

2) Déterminer des bases respectives de l'image et du noyau de $u$.

**Exercice 142**
Pour $n \geq 1$ entier, on note $\mathbf{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n$.
Pour $n \geq 1$ donné, on considère deux polynômes $A$ et $B$ de $\mathbf{R}[X]$, où on suppose que $A$ est de degré $n+1$. On définit une application $u$ de $\mathbf{R}_n[X]$ vers $\mathbf{R}_n[X]$ en associant à tout polynôme $P$ de $\mathbf{R}_n[X]$ le reste de la division euclidienne de $PB$ par $A$, que l'on note $u(P)$.
On admettra sans chercher à le démontrer que $u$ est une application linéaire.

I - Dans cette partie, on suppose que $n = 2$ ; on considère quatre réels $a$, $b$, $c$ et $\lambda$, on pose $A = X^3 + aX^2 + bX + c$ et $B = -X + \lambda$.
1) Vérifier que la matrice de $u$ dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbf{R}_2[X]$ est la matrice :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & c \\ -1 & \lambda & b \\ 0 & -1 & a+\lambda \end{pmatrix}.$$

2) On suppose dans cette question que $A = X^3 - X^2 - 3X + 2$ et que $B = -X + 2$.
Déterminer des bases respectives de l'image et du noyau de $u$.
3) On suppose dans cette question que $A = X^3 - X + 1$ et que $B = -X + 1$. Montrer que l'application $u$ est bijective, et écrire la matrice de $u^{-1}$ dans la base canonique $(1, X, X^2)$.

II - Dans cette partie, $n$ est un entier quelconque ($n \geq 1$).
4) On suppose dans cette question que les polynômes $A$ et $B$ sont premiers entre eux. Soit $P \in \operatorname{Ker} u$. Montrer que $A$ divise $P$. En déduire que $u$ est injective.
5) Soit $D \in \mathbf{R}[X]$ un diviseur commun à $A$ et $B$. Montrer que pour tout $P \in \mathbf{R}_n[X]$, $D$ divise $u(P)$.
6) Montrer que $u$ est bijective si et seulement si $A$ et $B$ sont deux polynômes premiers entre eux.

**Racines, facteurs irréductibles**

**Exercice 143**
Factoriser les polynômes suivants en facteurs irréductibles, dans le corps commutatif indiqué :
1) $X^n + X^{n-1} + \cdots + 1$ dans $\mathbf{C}[X]$.
2) $X^{11} + 2^{11}$ dans $\mathbf{C}[X]$ puis dans $\mathbf{R}[X]$.
3) $X^4 + 4$ dans $\mathbf{C}[X]$, puis dans $\mathbf{R}[X]$ et enfin dans $\mathbf{Q}[X]$.
4) $X^4 - j$ dans $\mathbf{C}[X]$.
5) $X^8 + X^4 + 1$ dans $\mathbf{R}[X]$.
6) $X^5 - 1$ dans $\mathbf{R}[X]$ (c'est difficile sans indication !).
7) $X^5 - 5X^4 + 10X^3 - 10X^2 + 5X + 31$ dans $\mathbf{C}[X]$ puis dans $\mathbf{R}[X]$. Pour cette question, on commencera par déterminer des nombres réels $a$ et $b$ qui permettent de regrouper le polynôme suggéré sous la forme : $(X+a)^5 + b$.

**Exercice 144**
Déterminer le PGCD de $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ et de $X^4 - 1$, considérés comme polynômes de $\mathbf{Q}[X]$.

**Exercice 145**
Pour quels entiers $n \geq 1$ le polynôme $X^{2n} + X^n + 1$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$ ? (dans $\mathbf{R}[X]$)

**Racines multiples et utilisation de la dérivée**

**Exercice 146**
On note $P$ le polynôme réel :

$$P = X^6 + 4X^5 + 8X^4 + 10X^3 + aX^2 + 4X + 1.$$

On suppose que $-1$ est racine de $P$.

1) Déterminer $a$.

2) Montrer que $-1$ est racine double de $P$.

3) Montrer que $j$ est racine multiple de $P$.

4) Factoriser $P$ en produits de facteurs irréductibles, d'abord dans $\mathbf{C}[X]$ puis dans $\mathbf{R}[X]$.

**Exercice 147**
Pour $a \in \mathbf{C}$ on pose :

$$P_a = 2X^3 + 3X^2 + 6X + a.$$

1) Calculer un PGCD de $P_a$ et de $P_a'$.

2) Pour quelles valeurs de $a$ le polynôme $P_a$ admet-il une racine double ? Pour chacune de ces valeurs, décomposer $P_a$ comme produit de facteurs irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$.

**Exercice 148**
Pour $P$ polynôme de $\mathbf{C}[X]$ de degré $n \geq 1$, on note $(z_i)_{1 \leq i \leq p}$ les racines de $P$ et on note $\alpha_i$ la multiplicité de $z_i$ comme racine de $P$.

1) Déterminer $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p$.

2) Montrer que si $P'$ divise $P$, alors $p = 1$.

3) Déterminer l'ensemble des polynômes à coefficients complexes divisibles par leur dérivé.

**Relations entre racines et coefficients**

**Exercice 149**
Soit $P = X^3 + 3X^2 + 2X + i$ un élément de $\mathbf{C}[X]$.

1) Déterminer les racines du polynôme $P'$, polynôme dérivé de $P$.

2) Montrer que $P$ n'admet aucune racine réelle.

3) Déduire des deux questions précédentes que $P$ admet trois racines dans $\mathbf{C}$, qu'on notera $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$.

4) a) Calculer $\alpha + \beta + \gamma$.
   b) Calculer $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$.
   c) Calculer $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$.

**Exercice 150**
Soient $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ les racines complexes du polynôme $P = X^3 + 3X^2 + X + 1$.

1) Écrire les relations liant les coefficients et les racines de $P$.

2) Quelle est la valeur de $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + 3\alpha\beta$ ?

**Exercice 151**
On note $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ $\alpha_4$ et $\alpha_5$ les cinq racines de

$$P = X^5 - 29X^4 + 117X^3 - 11X^2 + 4X + 1.$$

Ecrire le polynôme unitaire de degré 5 dont les racines sont $1/\alpha_1$, $1/\alpha_2$, $1/\alpha_3$, $1/\alpha_4$ et $1/\alpha_5$.

**Exercice 152**
Soit $p$ et $q$ deux complexes ; on note $P = X^3 + pX + q$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur $p$ et $q$ pour qu'il existe deux zéros de $P$ dont la somme des carrés soit égale au carré du troisième augmenté de 1.

**Exercice 153**
Soit $p$, $q$ et $r$ trois complexes, avec $r$ non nul. On note $P = X^4 + pX^2 + qX + r$. On note enfin $a$, $b$, $c$ et $d$ les zéros de $P$.
Calculer $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d}$, puis $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} + \dfrac{1}{d^2}$.

**Développements limités et utilisations**

**Exercice 154**

Donner pour chacune des fonctions proposées ci-dessous un équivalent simple :
a) $f(x) = x^8 + 5x^6 - 6x^3$ quand $x \to 0$
b) $f(x) = x^8 + 5x^6 - 6x^3$ quand $x \to +\infty$
c) $f(x) = x^8 + 5x^6 - 6x^3$ quand $x \to 2$
d) $f(x) = x^8 + 5x^6 - 6x^3$ quand $x \to 1$
e) $f(x) = x^7 + \sqrt{x} + (\ln x)^2 + e^{2x} + 4x^5 - x^9 + 5^{x+1}$ quand $x \to +\infty$

**Exercice 155**

Établir pour chacune des fonctions $f$ proposées ci-dessous un développement limité de $f$ en 0 à l'ordre $n$ proposé :

a) $f(x) = e^{-x}$ $(n = 5)$ b) $f(x) = \ln(1 + x^2)$ $(n = 6)$ c) $f(x) = \sin 2x + \cos x^2$ $(n = 7)$

d) $f(x) = e^{3x} \sin 2x$ $(n = 4)$ e) $f(x) = \dfrac{\ln(1 + x)}{1 + x}$ $(n = 3)$ f) $f(x) = \tan x$ $(n = 5)$

g) $f(x) = \dfrac{\ln(1 + x)}{e^x \sin x}$ $(n = 3)$ h) $f(x) = (1 + x)^{1/x}$ $(n = 3)$ i) $f(x) = \dfrac{\ln(1 + x)}{(1 + x)^2}$ $(n = 3)$

j) $f(x) = \operatorname{sh}\left(\dfrac{x}{1 + x}\right)$ $(n = 4)$ k) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x}{1 + \operatorname{sh} x}$ $(n = 4)$ l) $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$ $(n = 3)$

**Exercice 156**

Déterminer les réels $a$ et $b$ pour que $\cos x - \dfrac{1 + ax^2}{1 + bx^2}$ soit un infiniment petit d'ordre aussi élevé que possible au voisinage de 0.

**Exercice 157**

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1) Montrer que $f$ admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.

2) La fonction $f$ est-elle deux fois dérivable en 0 ?

**Exercice 158**

Pour $a$ réel fixé on définit la fonction $f_a$ par $f_a(x) = \operatorname{Arctan} \dfrac{x + a}{1 - ax}$.

1) Soit $n$ un entier. Déterminer un développement limité en 0 à l'ordre $n$ de la fonction dérivée $f_a'$.

2) Soit $k$ un entier. En utilisant le théorème de Taylor-Young, déduire de la question précédente la valeur de $f_a^{(k)}(0)$.

3) Soit $m$ un entier. En utilisant de nouveau le théorème de Taylor-Young et la question précédente, écrire un développement limité en 0 à l'ordre $m$ de $f_a$.

**Exercice 159**

Calculer les limites suivantes (sans présupposer leur existence !) :

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{3x - \frac{3}{2}\sin 2x}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x + \ln(\cos x)}{x^4}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\tan x - \sin 2x}{x(1 - \cos 3x)}$ e) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{1/x^2}$ f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos 2x)}{\ln(\cos 3x)}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x(e^x - 1)} - \dfrac{1}{x^2}$ h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)$ i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)$

**Exercice 160**

Calculer un développement limité ou asymptotique de la fonction $f$ pour chacun des cas suivants :
a) $f(x) = x^2 \ln x$ où $x$ tend vers 1 et à l'ordre 5 ;
b) $f(x) = \sqrt{2 + x}$ où $x$ tend vers 0 et à l'ordre 3 ;
c) $f(x) = \ln(2 + x)$ où $x$ tend vers 0 et à l'ordre 2 ;
d) $f(x) = \sin x$ où $x$ tend vers $\dfrac{\pi}{4}$ et à l'ordre 3 ;

e) $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 1$ à l'ordre 5, d'abord pour $x$ tendant vers 0 puis pour $x$ tendant vers 1 ;
f) $f(x) = \ln(\sin x)$ au voisinage de $\dfrac{\pi}{2}$ à l'ordre 3 ;
g) $f(x) = \sqrt{x^4 + x + 1}$ au voisinage de $+\infty$ avec trois termes significatifs ;
h) $f(x) = \operatorname{Arctan} \sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}$ au voisinage de $+\infty$ avec trois termes significatifs.

**Exercice 161**
Calculer les limites suivantes (en montrant leur existence) :
a) $\dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{3x+5}}{1 - \tan(\frac{\pi x}{4})}$ quand $x$ tend vers 1.
b) $\sqrt{\dfrac{x^3 - 2x}{x-1}} - x$ quand $x$ tend vers $+\infty$.
c) $x \left[ \dfrac{1}{e} - \left( \dfrac{x}{x+1} \right)^x \right]$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 162**
Soit $f$ la fonction définie sur $]-\dfrac{\pi}{6}, 0[\cup]0, \dfrac{\pi}{6}[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(1 - 2\sin x)}{\operatorname{sh} 2x}$.

1) Écrire le développement limité de $f$ en 0 à l'ordre 2.

2) Montrer que $f$ possède une limite quand $x$ tend vers 0. On notera $l$ cette limite dans la suite de l'exercice.

3) On pose $f(0) = l$. Montrer que $f$, ainsi prolongée, est dérivable en 0.

**Exercice 163**
On définit, pour $x \in ]0, +\infty[$ les fonctions $f$ et $g$ par :

$$f(x) = \operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan}(x+1) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{\operatorname{Arctan} x}{\operatorname{Arctan}(x+1)}.$$

1) Déterminer la limite de $f(x)$ pour $x$ tendant vers $+\infty$. En remarquant que $f(x) \sim \tan[f(x)]$ quand $x$ tend vers $+\infty$, en déduire que $f(x) \sim -\dfrac{1}{x^2}$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

2) En déduire la limite en $+\infty$ de $g(x)$, puis montrer que $\ln[g(x)] \sim \dfrac{f(x)}{\operatorname{Arctan}(x+1)}$ en $+\infty$.

3) Déduire de ce qui précède la valeur de $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left[ \frac{\operatorname{Arctan} x}{\operatorname{Arctan}(x+1)} \right]^{x^2}$.

**Exercice 164**
1) Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de :

$$\ln(1 + \operatorname{sh} x).$$

2) Déterminer un développement limité à l'ordre 2 en 0 de :

$$\frac{\ln(1 + \operatorname{sh} x)}{2x - x^2}.$$

3) Déterminer un développement limité à l'ordre 4 en 0 de :

$$\ln(1 + \operatorname{sh} x).$$

**Exercice 165**
On désigne par $f$ et $g$ les applications de $]-1,1[$ vers $\mathbf{R}$ respectivement définies pour $-1 < x < 1$ par :

$$f(x) = \sin[\ln(1+x)] \text{ et } g(x) = \ln(1+\sin x).$$

Établir des développements limités en 0 et à l'ordre 4 des fonctions $f$ et $g$ ; en déduire l'existence d'une constante réelle $k$ (qu'on explicitera) telle que

$$f(x) - g(x) \sim kx^4$$

quand $x \to 0$.

**Exercice 166**
Soit $f$ l'application définie sur $]-\pi,\pi[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\cos x + 1}$$

et $g$ l'application définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$g(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+\ln(1+x^2)}}.$$

1) Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $f$.

2) Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $g$.

3) En déduire l'existence et la valeur de :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{g(x) - f(x) + \frac{3}{8}x^2}{\sin^4 x}.$$

**Exercice 167**
Soit $f$ et $g$ les deux applications de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ respectivement définies par :

$$f(x) = \ln(1-x^2) \text{ et } g(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} - 1.$$

1) Déterminer des développements limités de $f$ et de $g$ à l'ordre 5, valables pour $x$ tendant vers 0.

2) Déduire de ces développements limités qu'il existe un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\text{pour tout } x \in ]-\eta,0[\cup]0,\eta[, \qquad f(x) < g(x).$$

**Exercice 168**
En utilisant un développement asymptotique, étudier les branches infinies des graphes des fonctions suivantes :
$f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$ ;
$f(x) = x^3 \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ ;
$f(x) = \dfrac{x^3+2}{x-1}$ ;
$f(x) = x - x^2 \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

**Exercice 169**

1) Soit $f$ de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$.
Montrer que quand $h \to 0$ (avec $h \neq 0$), on a :

$$\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} \to f''(x).$$

2) En évaluant $(1-x)^n$ et ses dérivées en $x=1$, montrer les identités :

$$\sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}\, p^k \binom{n}{p} = 0 \quad \text{pour tout } k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$$

et

$$\sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}\, p^n \binom{n}{p} = n!$$

3) Soit $f$ de classe $\mathcal{C}^n$ de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$.
Montrer que quand $h \to 0$ (avec $h \neq 0$), on a :

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p \binom{n}{p} f[x+(n-p)h]}{h^n} \to f^{(n)}(x).$$

**Polynômes : trucs en vrac**

**Exercice 170**

On note $\varphi \colon \mathbf{C}[X] \to \mathbf{C}[X]$ l'application définie pour tout polynôme $P$ par : $\varphi(P) = P(X+1) - P(X)$.

1) Montrer que $\varphi$ est linéaire et envoie $\mathbf{C}_n[X]$ dans lui-même. Quel est le noyau de $\varphi$ ? Quels sont les noyau et image de la restriction $\varphi_n$ de $\varphi$ en une application de $\mathbf{C}_n[X]$ vers $\mathbf{C}_n[X]$ ? Quelle est l'image de $\varphi$ ?

2) Pour tout $n \geq 1$, on note

$$Q_n = \frac{X(X-1)\cdots(X-(n-1))}{n!}$$

(définition qu'on complète en posant $Q_0 = 1$).
Montrer que $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ est une base de $\mathbf{C}_n[X]$, et calculer $\varphi(Q_n)$.

3) Montrer que les polynômes de $\mathbf{C}[X]$ qui prennent des valeurs entières (positives ou négatives) chaque fois qu'on les applique à des entiers sont exactement les combinaisons linéaires à coefficients entiers des $Q_i$ ($i \in \mathbf{N}$).
(Suggestion : montrer d'abord que les combinaisons linéaires à coefficients entiers des $Q_i$ prennent effectivement des valeurs entières sur $\mathbf{Z}$. Pour la réciproque, montrer par récurrence sur $p \in \mathbf{N}$ que tout polynôme $P$ de degré $p$ qui prend des valeurs entières sur $\mathbf{Z}$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers des $Q_i$ ; on aura pour ce faire vivement intérêt à considérer le polynôme $\varphi(P)$).

**Exercice 171**

Soit $a$ un réel et $n > 1$. Dans $\mathbf{R}[X]$, on considère les polynômes :

$$A_1 = X^n \sin a - X\sin(na) + \sin^{n-1} a$$
$$A_2 = X^{n+1}\cos[(n-1)a] - X^n\cos(na) - X\cos a + 1$$
$$B = X^2 - 2X\cos a + 1$$

1) Montrer que $A_1$ est divisible par $B$, et déterminer le quotient $Q_1$.

2) Montrer que $A_2$ est divisible par $B$, et déterminer le quotient $Q_2$.