Exercice 68
On désigne par f une application continue de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$. On suppose qu'il existe un nombre réel strictement positif k, tel que, pour tout x de $\mathbf{R}^+$, on ait :

$$0 \leq f(x) \leq k \int_0^x f(t)\,dt.$$

1) On définit l'application H de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$ en posant, pour tout x de $\mathbf{R}^+$:

$$H(x) = e^{-kx} \int_0^x f(t)\,dt.$$

Montrer que H est dérivable sur $\mathbf{R}^+$ et calculer $H'(x)$ pour tout x de $\mathbf{R}^+$.

2) Montrer que pour tout x de $\mathbf{R}^+$, $H(x) = 0$.

3) En déduire que f n'est autre que l'application nulle de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$.

Exercice 69
Soit f de $[0,1]$ vers $[0,1]$ une application continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$. On suppose que :

$$\int_0^1 f(t)\,dt = f(1).$$

Montrer qu'il existe un c dans $]0,1[$ tel que $f'(c) = 0$.

Bases des espaces vectoriels

Exercice 70
Soit E l'espace vectoriel des suites de réels, et soit $F \subset E$ l'ensemble des suites (u_n) qui vérifient la relation de récurrence :

$$\text{pour tout } n \geq 0, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

2) Montrer que les suites de terme général $a_n = (-1)^n$ et $b_n = 2^n$ forment une famille libre dans F.

3) Montrer que F est de dimension 2 et que les deux suites de la question précédente en constituent une base.

4) Déterminer toutes les suites (u_n) dans F telles que $u_0 = 1$ et $u_1 = -2$.

Exercice 71
Dans $\mathbf{R}^4$, on considère les vecteurs :
$v_1 = (1,2,0,1)$, $v_2 = (1,0,2,1)$, $v_3 = (2,0,4,2)$,
$w_1 = (1,2,1,0)$, $w_2 = (-1,1,1,1)$, $w_3 = (2,-1,0,1)$, $w_4 = (2,2,2,2)$.

1) Démontrer que les familles (v_1, v_2) et (w_1, w_2, w_3) sont libres.

2) Soit F le sous-espace vectoriel engendré par (v_1, v_2, v_3). Déterminer une base de F.

3) Soit G le sous-espace vectoriel engendré par (w_1, w_2, w_3, w_4). Déterminer une base de G.

Exercice 72
Dans $\mathbf{R}^3$, déterminer la nature géométrique et une base de chacun des sous-espaces vectoriels suivants :

1) $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x + y + z = 0\}$, $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2y - z = 0\}$, et enfin $E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x + y + z = 0 \text{ et } 2y - z = 0\}$.

2) $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$, $F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y = 0 \text{ et } y + z = 0\}$ et enfin $F_3 = F_1 \cap F_2$.

Exercice 73
Soit $E = \{\, (x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \mid x = 2y - z \text{ et } t = x + y + z \,\}$.
Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ et en déterminer une base.

Exercice 74
On note H le sous-espace de $\mathbf{R}^4$ engendré par les vecteurs :

$$u = (1,2,3,0) \text{ et } v = (1,0,-1,5).$$

1) Donner une base de H.

2) Compléter explicitement cette base de H en une base de $\mathbf{R}^4$.

Exercice 75
Dans ce qui suit, on note (x_1, x_2, x_3) un vecteur quelconque de $\mathbf{R}^3$.
On appelle :
F_1 le sous-espace de $\mathbf{R}^3$ d'équation $x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$.
F_2 le sous-espace de $\mathbf{R}^3$ engendré par les trois vecteurs $a = (3,0,1)$, $b = (2,1,1)$ et $c = (1,2,1)$.
F_3 le sous-espace de $\mathbf{R}^3$ caractérisé par les équations :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}.$$

F_4 le sous-espace de $\mathbf{R}^3$ caractérisé par les équations :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

F_5 le sous-espace de $\mathbf{R}^3$ engendré par les deux vecteurs $b = (2,1,1)$ et $d = (0,1,0)$.

1) Déterminer des bases respectives des cinq espaces F_1, F_2, F_3, F_4 et F_5.

2) Pour chacune des inclusions énumérées ci-dessus, dites (et justifiez) si elle est vraie ou non :

a) $F_1 \subset F_2$?	b) $F_2 \subset F_1$?	c) $F_3 \subset F_5$?	d) $F_5 \subset F_3$?
e) $F_3 \subset F_1$?	f) $F_1 \subset F_3$?	g) $F_3 \subset F_4$?	h) $F_4 \subset F_3$?

Fonctions uniformément continues

Exercice 76
Les fonctions qui suivent sont-elles ou non uniformément continues ?

1) $f_1(x) = 6x$ comme fonction de $[0,1]$ vers $\mathbf{R}$.

2) $f_2(x) = 6x$ comme fonction de $]0,1]$ vers $\mathbf{R}$.

3) $f_3(x) = 6x$ comme fonction de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$.

4) $f_4(x) = x^2$ comme fonction de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$.

5) $f_6(x) = \sin x$ comme fonction de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$.

6) $f_7(x) = \sqrt{x(1-x)}$ comme fonction de $[0,1]$ vers $\mathbf{R}$.

7) f_8 obtenue en prolongeant f_7 en une fonction périodique de période 1 définie sur $\mathbf{R}$.

Exercice 77
Soit f une fonction dérivable de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ telle que pour tout t réel, $|f'(t)| \leq 2$. Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 78
Donner un exemple d'une fonction continue f de $]0,1]$ vers $\mathbf{R}$ qui n'est pas uniformément continue, puis un exemple d'une fonction g de $]0,1]$ vers $\mathbf{R}$ qui est continue, bornée, et pourtant pas uniformément continue.

Exercice 79
Soit f une fonction de $]0,1]$ vers $\mathbf{R}$ telle que $f(t) \to +\infty$ quand $t \to 0^+$. Montrer que f n'est pas uniformément continue.

Exercice 80
Soit f une fonction dérivable de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ telle que $f'(t) \to +\infty$ quand $t \to +\infty$. Montrer que f n'est pas uniformément continue.

Sommes, sommes directes, supplémentaires

Exercice 81
On considère les deux sous-ensembles suivants de $\mathbf{R}^4$:

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + 4y - 5z - 2t = 0\} \text{ et } F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid 3x - y + t = 0\}$$

1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$; on admettra sans le démontrer que F est également un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.

2) Déterminer une base de E, puis une base de F.

3) Déterminer une base de $E + F$, puis. une base de $E \cap F$.

4) Soit (f_1, f_2, f_3) la base de F déterminée au 2). Expliciter un vecteur f_4 tel que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) soit une base de $\mathbf{R}^4$.

Exercice 82
Dans $\mathbf{R}^4$, on considère les vecteurs :
$a_1 = (0, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 0, 1, 1)$, $a_3 = (1, 1, 0, 1)$, $a_4 = (1, 1, 1, 0)$.
Soit F le sous-espace vectoriel engendré par (a_1, a_2) et G celui engendré par (a_3, a_4).
Montrer que $\mathbf{R}^4 = F \oplus G$.

Exercice 83
Dans $\mathbf{R}^4$, on considère les vecteurs :
$u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, -1, 1, -1)$, $u_3 = (1, 3, 1, 3)$,
$u_4 = (1, 2, 0, 2)$, $u_5 = (1, 2, 1, 2)$, $u_6 = (3, 1, 3, 1)$.
Soit F le sous-espace vectoriel engendré par (u_1, u_2, u_3) et G le sous-espace vectoriel engendré par (u_4, u_5, u_6).
Déterminer une base de F, de G, de $F + G$, de $F \cap G$.

Exercice 84
Dans $\mathbf{R}^4$, on considère les vecteurs :
$u_1 = (2, 3, 0, -1)$, $u_2 = (1, 0, 0, 1)$,
$u_3 = (0, 1, 0, 0)$, $u_4 = (1, 2, 2, 1)$.
Soit F le sous-espace vectoriel engendré par (u_1, u_2) et G le sous-espace vectoriel engendré par (u_3, u_4).
Déterminer les sous-espaces $F \cap G$ et $F + G$.

Exercice 85
Dans $\mathbf{R}^4$ on note $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + y + z = 0 \text{ et } x - y + t = 0\}$, F la droite de base $(1, 2, 1, 0)$ et G la droite de base $(0, 0, 1, 1)$.
Montrer que $E \oplus F \oplus G = \mathbf{R}^4$.

Exercice 86
Dans $\mathbf{R}^4$, on note $a = (1, -1, 1, 2)$, $b = (0, 1, -1, 3)$, $c = (0, 1, 0, -1)$ et $d = (2, 2, -1, 12)$.
On note $F = \mathrm{Vect}(a, b)$ et $G = \mathrm{Vect}(c, d)$.

1) a) (a, b, c, d) est-il une base de $\mathbf{R}^4$?

b) A-t-on $F + G = \mathbf{R}^4$?

c) Déterminer $F \cap G$.

d) Déterminer une base de $F + G$.

2) On note $e = (0, 0, 0, 1)$, et D la droite engendrée par e.

a) e est-il élément de $F + G$?

b) Montrer que $(F + G) \oplus D = \mathbf{R}^4$.

Exercice 87
Soit E un espace vectoriel et F, G et H trois sous-espaces de E tels que :

$$F \cap G = F \cap H, \qquad F + G = F + H, \qquad G \subset H.$$

Montrer que $G = H$.

Exercice 88

Soit E un espace vectoriel, et soit F, G et H trois sous-espaces de E.

1) Montrer l'inclusion :

$$(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H).$$

Expliciter un exemple montrant que cette inclusion peut être stricte.

2) Montrer l'égalité :

$$(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap [G + (F \cap H)].$$

Exercice 89

Quand F et G sont deux sous-espaces vectoriels distincts de $\mathbf{R}^6$, tous deux de dimension 4 :

1) Quelle peut être la dimension de $F + G$?

2) Quelle peut être la dimension de $F \cap G$?

Exercice 90

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$ vérifiant $\dim F = 1$, $\dim G = 2$ et $F \not\subset G$.
Montrer que $\mathbf{R}^3 = F \oplus G$.

Applications linéaires

Exercice 91

Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ? Justifier la réponse.

1) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, f(x, y, z) = (x + 1, y + 1, z + 1)$;

2) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}, f(x, y, z) = x + y + z$;

3) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}, f(x, y, z) = xyz$;

4) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, f(x, y, z) = (10, 100, 1000)$;

5) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}, f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$;

6) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3, f(x) = (x, 2x, 7x)$;

7) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, f(x, y) = (\sin x, \cos y)$.

Exercice 92

1) Déterminer l'ensemble des application linéaires surjectives de $\mathbf{R}^4$ vers $\mathbf{R}^6$.

2) Déterminer l'ensemble des applications linéaires injectives de $\mathbf{R}^4$ vers $\mathbf{R}^3$.

3) Déterminer l'ensemble des applications linéaires injectives de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}^4$.

Exercice 93

Soit f l'application de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{R}^5$ définie pour tous α, β réels par :

$$f[(\alpha, \beta)] = (\alpha + 2\beta, -2\alpha + 3\beta, \alpha + \beta, 3\alpha + 5\beta, -\alpha + 2\beta).$$

1) Montrer que f est une application linéaire.

2) Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et préciser sa dimension.

3) Déterminer $\operatorname{Im} f$ et préciser sa dimension.

Exercice 94

Soit $u \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ l'application définie pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ par :

$$u(x, y) = (4x - 5y, 3x - 4y).$$

1) Montrer que u est linéaire et expliciter sa matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$.

2) Montrer que u est bijective.

3) Expliciter la réciproque u^{-1}.

Encore une couche d'intégrales sans gros calculs

Exercice 95
Soit F définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^{\sin^2 x} \text{Arcsin}(\sqrt{t})\, dt + \int_0^{\cos^2 x} \text{Arccos}(\sqrt{t})\, dt.$$

1) Justifier la dérivabilité de F, calculer une expression simple de F' et en déduire une expression beaucoup plus simple de F.

2) Montrer (sans calculer de dérivée) que pour tout s réel : $\text{Arcsin}(\sqrt{s}) + \text{Arcsin}(\sqrt{1-s}) = \dfrac{\pi}{2}$.
À partir de cette formule, montrer que : $\text{Arccos}(\sqrt{s}) = \text{Arcsin}(\sqrt{1-s})$ et retrouver l'expression simple de $F(x)$ sans avoir effectué de calcul de dérivée.

Exercice 96
Pour f de $[0,1]$ vers $\mathbf{R}$ continue et $n \geq 0$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t), dt$.

1) Montrer que I_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

2) On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. En effectuant une intégration par parties, montrer que nI_n tend vers $f(1)$ quand n tend vers l'infini.

Exercice 97
Soit F la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $F(0) = \ln 2$ et, pour $x \neq 0$:

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\, dt.$$

1) Montrer que pour tout $x \neq 0$:

$$F(x) = \ln 2 - \int_x^{2x} \frac{1-\cos t}{t}\, dt.$$

2) En étudiant la fonction φ définie par $\varphi(t) = t^2 - 2 + 2\cos t$, montrer que pour tout t réel :

$$0 \leq 1 - \cos t \leq \frac{t^2}{2}.$$

En déduire que pour tout x réel, on a l'inégalité :

$$|F(x) - \ln 2| \leq \frac{3}{4}x^2.$$

3) Montrer que F est continue sur $\mathbf{R}$.

4) Montrer que $F(x)$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$ (on pourra intégrer par parties).

5) Montrer que F est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ et calculer $F'(x)$ pour x non nul. Montrer que F est également dérivable en 0 et calculer $F'(0)$.

Exercice 98
On définit une application f de $[0,1]$ vers $\mathbf{R}$ par :

$$f(t) = \frac{t-1}{\ln t} \text{ pour } 0 < t < 1,\ f(0) = 0,\ f(1) = 1$$

et une application F de $]0,1[$ vers $\mathbf{R}$ par :

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\, dt.$$

1) Montrer que f est continue en tout point de $[0,1]$.
2) Soit x dans l'intervalle $]0,1[$. Quel est le signe de $F(x)$?
3) Montrer que F est dérivable en tout point de $]0,1[$ et calculer sa dérivée.
4) a) Pour x dans l'intervalle $]0,1[$, montrer que

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t}\, dt = \ln 2.$$

b) Pour x dans l'intervalle $]0,1[$, montrer les inégalités : $x^2 \ln 2 \leq F(x) \leq x \ln 2$.
c) En déduire l'existence et la valeur de la limite

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} F(x).$$

5) Montrer que $F(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 (avec $x > 0$).
6) a) Montrer que quand ϵ tend vers 0 (avec $0 < \epsilon < 1$)

$$\int_\epsilon^{1-\epsilon} f(t)\, dt \quad \text{tend vers} \quad \int_0^1 f(t)\, dt.$$

b) Déduire de ce qui précède la valeur de $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt$.

Exercice 99
Soit f la fonction d'une variable réelle définie par :

$$f(t) = \frac{t^2}{t^2 + \sin^2 t} \qquad \text{pour } t \neq 0 \text{ et } f(0) = \frac{1}{2}.$$

1) Montrer que f est une fonction continue. Est-elle dérivable ?
2) Déterminer la limite de f en $+\infty$ (sans présupposer son existence).
3) Pour tout x réel, on pose :

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t)\, dt.$$

Montrer que cette fonction est dérivable sur $\mathbf{R}$, et expliciter sa dérivée. Montrer qu'elle est impaire.
4) Pour $x > 0$, montrer l'inégalité :

$$\int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2+1}\, dt \leq F(x) \leq x$$

et en déduire que :

$$x - \operatorname{Arctan}(2x) + \operatorname{Arctan} x \leq F(x) \leq x.$$

Exercice 100
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ vers $\mathbf{R}$ telle que $f(1) = 0$.
Montrer que :

$$\int_0^1 \left[f'(t) + (\tan t) f(t)\right]^2\, dt = \int_0^1 \left[f'(t)\right]^2\, dt - \int_0^1 \left[f(t)\right]^2\, dt.$$

En déduire l'inégalité :

$$\int_0^1 \left[f(t)\right]^2\, dt \leq \int_0^1 \left[f'(t)\right]^2\, dt.$$