Exercice 43

On pose $u = (1, 4, 3), v = (0, 2, 1)$ et $w = (3, 1, -1)$.

1) Montrer que (u, v, w) est libre dans $\mathbf{R}^3$.

2) Montrer que (u, v, w) est un système générateur de $\mathbf{R}^3$ (sans utiliser la théorie de la dimension).

Exercice 44

Le vecteur $(1, 2, 3)$ est-il ou non dans le sous-espace de $\mathbf{R}^3$ engendré par la famille suivante :

$$((1, 1, 1), (-2, 1, 7), (1, -1, 5), (2, 1, -1))\,?$$

Exercice 45

Discuter en fonction du paramètre réel m si la famille $((1, 1, 0), (m, 0, m), (0, m, 3))$, composée de trois vecteurs de $\mathbf{R}^3$, est libre ou non.

Exercice 46

Lesquels de ces ensembles sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$?

1) L'ensemble D_1 engendré par le vecteur $(2, 3)$.

2) L'ensemble $D_2 = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 3x - 2y = 0 \,\}$.

3) L'ensemble $D_3 = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 3x - 2y = 1 \,\}$.

4) L'ensemble $D_4 = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 3x + 4y = 0 \,\}$.

5) L'ensemble $D_5 = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \,\}$.

6) L'ensemble $D_6 = \{\, (\alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbf{R} \,\}$.

7) L'ensemble $D_7 = \{\, (x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0 \,\}$.

8) L'ensemble $D_8 = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 9x^2 + 4y^2 - 12xy = 0 \,\}$.

Exercice 47

Lesquels de ces ensembles sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$?

1) L'ensemble $E_1 = \{\, (\alpha, \beta, 0) \mid \alpha \in \mathbf{R}, \beta \in \mathbf{R} \,\}$.

2) L'ensemble $E_2 = \{\, (x, y, z) \mid xy + yz + z + x = 0 \,\}$.

3) L'ensemble $E_3 = \{\, (x, y, z) \mid x + y + z = 0 \,\}$.

4) L'ensemble $E_4 = \{\, (x, y, z) \mid x + y + z = 1 \,\}$.

5) L'ensemble $E_5 = \{\, (x, y, z) \mid \sin x + \sin y + \sin z = 0 \,\}$.

Exercice 48

1) a) Soit x un réel. Discuter selon la valeur de x de ce que vaut le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(x)$ du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R}$ engendré par x.

b) En déduire la description complète des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}$.

2) a) Soit (a, b) et (c, d) deux vecteurs de $\mathbf{R}^2$ non colinéaires l'un à l'autre (c'est-à-dire tels que pour tout λ réel, on ait $(a, b) \neq \lambda(c, d)$ et $(c, d) \neq \lambda(a, b)$).
Montrer que le sous-espace vectoriel du $\mathbf{R}$-espace $\mathbf{R}^2$ engendré par (a, b) et (c, d) est égal à $\mathbf{R}^2$.

b) En déduire la description complète des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$.

Exercice 49

Dans $\mathbf{Q}^3$, on considère les vecteurs : $u = (1, -1, 1)$, $v = (0, -1, 2)$, $w = (1, -2, 3)$.

1) La famille (u, v, w) est-elle libre ?

2) Soit F le sous-espace vectoriel engendré par (u, v, w). Donner une base de F.

3) Soit $G = \{\, (x, y, z) \in \mathbf{Q}^3 \mid x + 2y + z = 0 \,\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{Q}^3$, puis que $F = G$.

Exercice 50
Montrer que les deux familles de vecteurs suivantes :

$$((1,2,-1,3),(2,4,1,-2),(3,6,3,-7)) \text{ et } ((1,2,-4,11),(2,4,-5,14))$$

engendrent le même sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^4$.

Exercice 51

1) Donner un exemple de deux systèmes $(f_1,\dots,f_p)$ et $(g_1,\dots,g_q)$ d'un même $\mathbf{R}^n$ telles que :
 * les deux systèmes $(f_1,\dots,f_p)$ et $(g_1,\dots,g_q)$ sont libres ;
 * chaque fois qu'on prend un i (entre 1 et p) et un j (entre 1 et q), f_i n'est pas proportionnel à g_j ;
mais que pourtant le système $(f_1,\dots,f_p,g_1,\dots,g_q)$ soit lié.

2) On suppose cette fois que $f_1,\dots,f_p,g_1,\dots,g_q$ sont des vecteurs de $\mathbf{R}^n$ (où n est un entier naturel fixé) tels que :
 * les deux systèmes $(f_1,\dots,f_p)$ et $(g_1,\dots,g_q)$ sont libres ;
 * en notant F le sous-espace engendré par $(f_1,\dots,f_p)$ et G le sous-espace engendré par $(g_1,\dots,g_q)$, l'intersection $F\cap G$ est réduite à $\{0\}$.
Montrer que le système $(f_1,\dots,f_p,g_1,\dots,g_q)$ est libre.

Exercice 52
Soit n un entier naturel et soit $(e_1,\dots,e_k)$ un système fixé de vecteurs de $\mathbf{R}^n$.
On note $\Phi\colon \mathbf{R}^k\to\mathbf{R}^n$ l'application définie par :
pour tout $(\lambda_1,\dots,\lambda_k)\in\mathbf{R}^k$,

$$\Phi\left[(\lambda_1,\dots,\lambda_k)\right]=\lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_k e_k.$$

1) Montrer que $(e_1,\dots,e_k)$ est générateur de $\mathbf{R}^n$ si et seulement si Φ est une surjection.

2) Montrer que $(e_1,\dots,e_k)$ est libre si et seulement si Φ est une injection.

Exercice 53

1) Montrer que la réunion de deux sous-espaces vectoriels F et G d'un même $\mathbf{R}^n$ peut ne pas être un espace vectoriel.

2) Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un même $\mathbf{R}^n$, tels que $F\not\subset G$ et $G\not\subset F$.
Montrer que $F\cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.

Exercice 54
Soit $E=\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ l'espace des applications de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$.

1) Rappeler la définition de la structure usuelle d'espace vectoriel sur cet ensemble.

2) Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?
 a) L'ensemble des applications linéaires ?
 b) L'ensemble des applications continues ?
 c) L'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$?
 d) L'ensemble des applications surjectives ?
 e) L'ensemble des applications f telles que $f^{-1}(\mathbf{R}^*)$ est fini ?

Exercice 55
Dans l'espace de l'exercice précédent, montrer que sont libres les familles suivantes (par abus de notation, on note parfois dans la liste qui suit $f(x)$ pour signifier f) :

1) $(\sin,\cos)$.

2) (x,x^2,x^3).

3) (e^x,e^{2x},e^{3x})

4) (e^{ax},e^{bx},e^{cx}) où a, b et c sont trois réels distincts.

Exercice 56

1) Soit u et v deux réels tels que $u \in]-1,1[$ et $v \in]-1,1[$.

a) Montrer que $0 < 1 + uv$.

b) Montrer que $-1 < \dfrac{u+v}{1+uv} < 1$.

2) Soit a un réel fixé avec $a \in]-1,1[$. On considère les deux fonctions f et g définies sur $]-1,1[$ par :

$$f(t) = \operatorname{Argth} a + \operatorname{Argth} t \qquad \text{et} \qquad g(t) = \operatorname{Argth}\left(\frac{a+t}{1+at}\right).$$

Calculer les fonctions dérivées f' et g'.

3) Montrer que pour tous réels a et b tels que $a \in]-1,1[$ et $b \in]-1,1[$,

$$\operatorname{Argth} a + \operatorname{Argth} b = \operatorname{Argth}\left(\frac{a+b}{1+ab}\right).$$

Exercice 57

Pour tout $n \geq 1$, on note :

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} \operatorname{Arctan} \frac{1}{p^2+3p+3}.$$

1) Calculer S_1 et S_2.

2) Donner une expression simple de S_n et en déduire la limite de S_n quand n tend vers l'infini.

Exercice 58

Soit f définie pour certains réels par :

$$f(x) = \operatorname{Arctan}(x + \sqrt{x^2-1}).$$

1) Préciser l'ensemble de définition de f.

2) Montrer que f induit une bijection entre son ensemble de définition et un ensemble K qu'on explicitera.

3) Fournir une expression pas trop compliquée de la réciproque f^{-1}.

Fonctions en escalier et intégrabilité

Exercice 59

1) Montrer que le produit de deux fonctions en escalier est une fonction en escalier.

2) La composée de deux fonctions en escalier est toujours une fonction en escalier. Est-ce vrai ou faux ? (Justifier).

Exercice 60

Montrer que si f est intégrable, alors $|f|$ est également intégrable.

Exercice 61

Soit a et b deux réels fixés, avec $a < b$. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions continues de $[a,b]$ vers $\mathbf{R}$, $\mathcal{E}_0$ l'ensemble des fonctions en escalier de $[a,b]$ vers $\mathbf{R}$ nulles en a et $\mathcal{M}$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux de $[a,b]$ vers $\mathbf{R}$.

1) Montrer que $\mathcal{C}$, $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{M}$ sont trois sous-espaces vectoriels de l'espace de toutes les applications de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$

2) Montrer que tout élément de $\mathcal{M}$ peut être écrit d'une façon et d'une seule comme somme d'un élément de $\mathcal{C}$ et d'un élément de $\mathcal{E}_0$.

$$J = \int_a^b f.$$

Manipulations simples sur les intégrales définies

Exercice 62
Prouver l'énoncé suivant :

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ (où $a < b$), à valeurs positives, telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0$ alors f est nulle sur $[a, b]$.

1) Comme une question de cours (mais sans regarder celui-ci), en rappelant la démonstration fournie en cours.

2) En centrant la preuve sur l'existence d'une primitive de f sur $[a, b]$.

Exercice 63
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ (où $a < b$).

Montrer que f est de signe constant si et seulement si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt = |\int_a^b f(t)dt|$.

Exercice 64
Soit f une fonction continue de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$. Prouver que, lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives, $\displaystyle\frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)dt$ tend vers $\displaystyle\frac{1}{2}f(0)$.

Exercice 65

1) Montrer que $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n t dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

2) Montrer que $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 66
Donner une expression raisonnablement simple des dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x) = \int_x^{x+1} \frac{e^t}{t}\, dt \qquad\qquad g(x) = \int_0^{x^2} [\mathrm{Arctan}(t + x)]^7\, dt.$$

Exercice 67

1) Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \ln(1 + t^2)dt$.

2) On pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \sqrt[n]{1 + t^2}dt$ (pour $n \geq 1$). Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

3) a) Soit $u > 0$. En introduisant la fonction auxiliaire φ_u définie par :

$$\varphi_u(t) = e^t - t - 1 + \frac{t^2}{u^2}(1 + u - e^u)$$

et en la considérant sur $[0, u]$ montrer l'existence d'un $d \in]0, u[$ tel que $\varphi_u''(d) = 0$.

b) En déduire l'inégalité :

$$|e^u - 1 - u| \leq \frac{1}{2}u^2 e^u.$$

d) En déduire que pour tout $t \in [0, 1]$,

$$|\sqrt[n]{1 + t^2} - 1 - \frac{1}{n}\ln(1 + t^2)| \leq \frac{1}{n^2}$$

puis fournir une suite v_n très simple telle que :

$$\frac{u_n - 1}{v_n} \to 1 \qquad \text{quand} \qquad n \to +\infty.$$