Exercice 1
Étant donnés trois vecteurs u, v et w de $\mathbf{R}^3$ on dit que ces vecteurs forment une famille **libre** lorsque :

$$\text{pour tous } \lambda, \mu, \nu \in \mathbf{R}^3, (\lambda u + \mu v + \nu w = 0) \Rightarrow (\lambda = \mu = \nu = 0).$$

Soit A, B, C et D quatre points de l'espace $\mathbf{R}^3$ qu'on supposera distincts (ce n'est pas indispensable, mais ça simplifie un peu les choses).

1) On suppose A, B, C et D coplanaires. En écrivant que le point D appartient au plan défini par A, B et C, montrer que les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$ forment une famille qui n'est pas libre.

2) On suppose au contraire A, B, C et D non coplanaires. En utilisant le même genre d'idées, montrer que les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$ forment une famille libre.

3) Synthétiser les résultats des deux questions précédentes en un énoncé raisonnablement concis.

Exercice 2
Résoudre en fonction des paramètres réels a et b l'équation suivante, d'inconnue réelle x :

$$ax = b.$$

Exercice 3
Dans cet exercice, on considère six réels a, b, c, d, s et t et on s'intéresse au système (S) d'inconnues réelles x et y :

$$\begin{cases} ax + cy = s \\ bx + dy = t \end{cases}.$$

1) Dans cette question, on suppose que $ad - bc \neq 0$. Résoudre le système (S). Apprendre par coeur le résultat obtenu, qui peut toujours faire gagner du temps dans l'avenir.

2) Dans cette question on suppose que $ad - bc = 0$. Discuter en fonction des six paramètres de (S) du nombre de solutions du système et de l'allure de l'ensemble des solutions.

Exercice 4
On considère un système d'une trentaine d'équations à deux inconnues x et y, dont chacune a la forme : $a_i x + b_i y = c_i$, pour des paramètres réels a_i, b_i et c_i.
Quels ensembles peuvent-ils être ensembles de solutions de ce système ?

Exercice 5
On note m un réel, puis dans $\mathbf{R}^3$ on considère les quatre points :

$$A = (1, 0, 1), \qquad B = (2, 1, 0), \qquad C = (m, 2m, -1), \qquad D = (m^7, \cos m, \operatorname{Argsh} m).$$

et le vecteur $\vec{u} = (2, 5, -3)$.

1) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2) On note Π le plan défini par les trois points A, B et C et Δ la droite passant par D et ayant $\vec{u}$ pour vecteur directeur.
Pour quelles valeurs du paramètre m la droite Δ est-elle parallèle au plan Π ?

Exercice 6
On fixe un entier $n \geq 3$ et on considère n points d'un plan, qu'on note $A_1, \ldots, A_n$.
L'objectif de l'exercice est de discuter de l'existence de n points $B_1, \ldots, B_n$ tels que, pour tout i entre 1 et $n-1$ le point A_i soit le milieu de $[B_i, B_{i+1}]$ et que A_n soit le milieu de $[B_n, B_1]$.

1) Dans cette question $n = 3$. En se plaçant dans un repère du plan, ramener le problème à la résolution d'un système de six équations à six inconnues. Montrer qu'il admet une et une seule solution.

2) Traiter de même $n = 5$, puis un n impair général.

3) Que se passe-t-il pour n pair ?

Exercice 7
On définit une application F de $\mathbf{R}^3$ vers l'ensemble des parties de $\mathbf{R}^2$ en posant, pour tout (a,b,c) de $\mathbf{R}^3$:

$$F\left((a,b,c)\right) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid ax+by=c\}.$$

1) Déterminer $F(0)$ puis $F(\{0\})$.

2) F est -elle injective ?

3) a) Soit Δ_0 l'axe vertical Oz dans $\mathbf{R}^3$. Déterminer $F(\Delta_0)$.

b) Soit Δ_1 la droite de $\mathbf{R}^3$ qui passe par l'origine et par le point $P=(1,2,5)$. Déterminer $F(\Delta_1)$.

c) Plus généralement, soit Δ une droite de $\mathbf{R}^3$ qui passe par l'origine et qui n'est pas verticale. Décrire $F(\Delta)$.

4) Parmi les quatre expressions $F^{-1}(\emptyset)$, $F^{-1}(\{\emptyset\})$, $F^{-1}(\mathbf{R}^2)$, $F^{-1}(\{\mathbf{R}^2\})$ trois ont sens mais une ne veut rien dire. Laquelle ? Pour celles qui veulent dire quelque chose, déterminer ce que c'est.

5) a) Soit Π_1 le plan Oxy dans $\mathbf{R}^3$. Déterminer $F(\Pi_1)$.

b) Même question pour Π_2 le plan de $\mathbf{R}^3$ qui passe par l'origine et dont $(2,3,1)$ est un vecteur normal.

c) Même question de façon générale pour Π un plan de $\mathbf{R}^3$ qui passe par l'origine mais n'est pas vertical.

d) Et tant qu'on y est pour un plan vertical passant par l'origine.

6) Déterminer $F(\Delta)$ pour une droite Δ de $\mathbf{R}^3$ verticale qui ne passe pas par l'origine.

7) (Pour les courageux seulement !)

a) Traiter sur votre élan la description de $F(\Pi)$ pour Π plan non vertical ne passant pas par l'origine.

b) Et pourquoi s'arrêter ? Traiter aussi $F(\Delta)$ pour Δ droite non verticale ne passant pas par l'origine. (On sera amené à distinguer deux cas si on s'y essaie sérieusement).

Exercice 8
Montrer que la fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$.

Exercice 9
Étude et tracé du graphe de la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{2}\cos(2x) - \cos x$, et résoudre $f(x)=0$.

Exercice 10
Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = x - \dfrac{\ln x}{x}$.

1) Soit g la fonction numérique définie par $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$. Dresser le tableau de variations de cette fonction, et en déduire qu'il existe un et un seul réel x_0 tel que $g(x_0)=0$. Déterminer x_0.

2) En déduire les variations de f.

3) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

4) Déterminer l'asymptote au graphe de f.

5) Tracer ce graphe et son asymptote en faisant figurer les tangentes remarquables.

Exercice 11
Soit $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ l'application définie par $f(x) = \begin{cases} x^x & \text{si } x>0 \\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases}$.
Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 (avec $x \neq 0$), puis étudier en quels points de $\mathbf{R}^+$ la fonction f est dérivable. Étudier ses variations et tracer sommairement son graphe.

Exercice 12
Discuter l'équation $\exp(-ae^{-ax}) = x$, où le paramètre a, est un réel donné vérifiant $0 \leq a \leq e$.

Exercice 13
Résoudre les équations suivantes, d'inconnue réelle x :

1) $\ln\left(\dfrac{x+3}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(\ln x + \ln 3)$; 2) $x^{\left(x^{\sqrt{x}}\right)} = (x^x)^{\sqrt{x}}$; 3) $2^{\sin^2 x} = \cos x$; 4) $\sin(\cos x) = \cos(\sin x)$.

Exercice 14
Soit θ un réel. En utilisant l'exponentielle complexe, retrouver les formules permettant de calculer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de $\sin\theta$.

Exercice 15
Linéariser les expressions $\cos^5\theta$, puis $\cos^4\theta\sin^2\theta$.

Exercice 16
Soit $n \geq 1$ un entier et θ un réel.
1) Calculer les expressions

$$A_n = 1 + \binom{n}{1}\cos(\theta) + \binom{n}{2}\cos(2\theta) + \cdots + \binom{n}{n}\cos(n\theta) \quad \text{et}$$
$$B_n = \binom{n}{1}\sin(\theta) + \binom{n}{2}\sin(2\theta) + \cdots + \binom{n}{n}\sin(n\theta).$$

2) Calculer les expressions

$$C_n = \sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta) \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta).$$

Exercice 17
Établir la formule suivante :

$$\tan(x-y) + \tan(y-z) + \tan(z-x) = \tan(x-y)\tan(y-z)\tan(z-x).$$

où x, y, z sont trois réels pour lesquels les trois tangentes apparaissant dans la formule sont définies.

Trigonométrie hyperbolique

Exercice 18
Montrer les formules suivantes, valables pour tous réels x, y :

$$(1)\ \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 y = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 y = \operatorname{ch}(x+y)\operatorname{ch}(x-y)\ ;$$

$$(2)\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 2\operatorname{sh}\frac{x+y}{2}\operatorname{ch}\frac{x-y}{2}\ ; \qquad (3)\ \operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2\operatorname{sh}\frac{x-y}{2}\operatorname{sh}\frac{x+y}{2}.$$

Exercice 19
Résoudre le système :

$$\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 3 \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 2 \end{cases}.$$

Exercice 20
1) Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - y = 4\operatorname{ch} t$$

dans laquelle l'inconnue est y, fonction deux fois dérivable d'une variable réelle notée t.
2) Résoudre l'équation différentielle :

$$y'\operatorname{ch} t + y\operatorname{sh} t = 0$$

dans laquelle l'inconnue est y, fonction dérivable d'une variable réelle notée t.

Exercice 21
Calculer $\mathrm{ch}(\frac{1}{2}\ln 3)$ et $\mathrm{sh}(\frac{1}{2}\ln 3)$.
Utiliser le résultat pour trouver les solutions réelles de l'équation :

$$2\,\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = \sqrt{3}\,\mathrm{ch}(5x).$$

Exercice 22

1) Soit u un réel. Exprimer $\mathrm{ch}^5 u$ en fonction de puissances de e^u.

2) Même question avec $\mathrm{sh}^4 u$.

Et voilà les fonctions réciproques

Exercice 23
Calculer :

$$\text{a)}\ \mathrm{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{b)}\ \mathrm{Arcsin}\sin(\frac{2\pi}{3}) \quad \text{c)}\ \mathrm{sh}\,\mathrm{Argsh}(\frac{1}{5}) \quad \text{d)}\ \mathrm{Argch}\,\mathrm{ch}(1-\ln 5)$$

$$\text{e)}\ \mathrm{Arctan}\tan(\frac{\pi}{7}) \quad \text{f)}\ \mathrm{Arctan}\tan(\frac{4\pi}{7}) \quad \text{g)}\ \mathrm{Arccos}\cos(\frac{82\pi}{11}).$$

Exercice 24

1) Pour x réel, déterminer une expression de $\mathrm{Argth}\,x$ n'utilisant que des fonctions plus élémentaires.

2) Même question pour $\mathrm{Argch}\,x$.

Exercice 25
Tracer les graphes des fonctions $\theta \mapsto \mathrm{Arccos}(\cos\theta)$, $\theta \mapsto \mathrm{Arcsin}(\sin\theta)$, $\theta \mapsto \mathrm{Arctan}(\tan\theta)$.

Exercice 26
Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \mathrm{Argth}\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$.

1) Préciser l'ensemble de définition de f puis l'ensemble des points où elle est dérivable.

2) Aux points où f est dérivable, calculer $f'(x)$, et en déduire une expression plus simple de chacune des restrictions de f aux trois intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ et $]1,+\infty[$.

Exercice 27

1) Montrer qu'il existe un polynôme P du quatrième degré tel que pour tout réel x :

$$16x^6 + 24x^4 + 9x^2 + 1 = (x^2+1)P(x)$$

et expliciter ce polynôme.

2) Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \mathrm{Argsh}(3x + 4x^3)$.

a) Préciser l'ensemble de définition de f, puis l'ensemble des points où elle est dérivable.

b) Aux points où f est dérivable, calculer $f'(x)$. En déduire une expression plus simple de $f(x)$.

Exercice 28
On considère la fonction définie par $f(x) = \mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Déterminer les limites éventuelles de f aux bornes de son ensemble de définition.

3) Calculer la dérivée $f'(x)$ en les points où ce calcul ne pose pas de difficulté sérieuse (en étant précis pour expliciter où on travaille), puis étudier les variations de f.

4) Discuter l'aspect des tangentes ou demi-tangentes éventuelles au graphe de f aux points d'abscisses respectives -1 et 1, et tracer sommairement le graphe de f. En quels points f est-elle dérivable ?

Exercice 29
Mêmes questions pour la fonction définie par $f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$.

Exercice 30
Dans certains des exercices de tracés de graphe qui précèdent, on a trouvé *a posteriori* des réponses étonnamment simples, notamment des dérivées très simples. Recommencer en s'y prenant plus astucieusement, afin d'obtenir les mêmes résultats autrement que par le calcul courageux mais volumineux de dérivées de fonctions composées.

Exercice 31
1) Montrer que pour $-\dfrac{\pi}{2} < \phi < \dfrac{\pi}{2}$, on a l'identité :

$$\sin\phi = \frac{\tan\phi}{\sqrt{1+\tan^2\phi}}.$$

2) Pour x réel, transformer les expressions $\sin(\operatorname{Arctan} x)$ et $\cos(\operatorname{Arctan} x)$ en des expressions ne faisant pas apparaître de fonctions trigonométriques.

Exercice 32
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(u) = 3\operatorname{ch} u - 4$ et soit g la fonction définie par $g(u) = \operatorname{Arcsin}(3\operatorname{ch} u - 4)$.
1) Montrer que pour tout réel u :

$$u \in [-\ln 3, \ln 3] \iff f(u) \in [-1, 1].$$

2) Déterminer l'ensemble de définition de g, et préciser l'ensemble des points où g est continue.
3) En précisant son domaine de validité, montrer la formule :

$$g'(u) = \frac{3\operatorname{sh} u}{\sqrt{3(\operatorname{ch} u - 1)(5 - 3\operatorname{ch} u)}}.$$

4) Déterminer les limites de cette expression aux bornes de son domaine de validité.
(Suggestion : pour l'un des calculs de cette question, écrire $\operatorname{sh} u$ et $\operatorname{ch} u$ en fonction de $\operatorname{sh}(u/2)$ et $\operatorname{ch}(u/2)$ peut être éclairant).
5) Déterminer l'ensemble des points où g est dérivable.
6) Dresser le tableau de variations de g puis tracer sommairement son graphe.

Exercice 33
1) Montrer que $0 \leq \operatorname{Arcsin}\frac{4}{5} + \operatorname{Arcsin}\frac{5}{13} \leq \dfrac{\pi}{2}$.
2) Résoudre l'équation d'inconnue réelle x :

$$\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arcsin}\frac{4}{5} + \operatorname{Arcsin}\frac{5}{13}.$$

Exercice 34
On considère l'équation d'inconnue réelle x :

$$(E) \qquad \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin}\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

1) Montrer que toute solution de (E) est positive.
2) Résoudre (E).

Exercice 35
Montrer que $\operatorname{Arctan} 1 + \operatorname{Arctan} 2 + \operatorname{Arctan} 3 = \pi$.

Exercice 36
Résoudre les équations suivantes, d'inconnue réelle x :

$$(1)\ \operatorname{Arcsin}(2x) - \operatorname{Arcsin}(x\sqrt{3}) = \operatorname{Arcsin} x;$$

$$(2)\ \operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}(x+1) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 37
Montrer que $\operatorname{Arcsin} \frac{4}{5} = 2 \arctan \frac{1}{2}$.
On pourra utiliser la formule donnant $\sin\theta$ en fonction de $\tan(\theta/2)$.

Exercice 38
Montrer que pour tout $x \geq 0$,

$$\frac{x}{x^2+1} \leq \operatorname{Arctan} x.$$

Corps commutatifs

Exercice 39

1) Citer un exemple de corps inclus dans $\mathbf{R}$ (et avec les mêmes règles d'addition et de multiplication que celles de $\mathbf{R}$) mais autre que $\mathbf{R}$ lui-même.

2) Montrer que $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$ est un corps.

3) Montrer que le seul sous-ensemble de $\mathbf{Q}$ qui soit un corps (avec les additions et multiplications ordinaires) est $\mathbf{Q}$ lui-même.

4) (généralisation de la question 2) Soit A un sous-ensemble de R qui est un corps, et $p \geq 2$ un nombre entier. Montrer que $\{a + b\sqrt{p} \mid a, b \in A\}$ est un corps.

5) Est-ce que $\{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{6} \mid a, b, c \in \mathbf{Q}\}$ est un corps ?

6) Et que pensez-vous de $\{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \mid a, b, c, d \in \mathbf{Q}\}$?

Exercice 40

1) Soit k un corps commutatif. Montrer que pour tous λ, μ de k, $\lambda\mu$ est nul si et seulement si λ ou μ est nul.

2) Soit E un espace vectoriel sur k. Montrer que pour tout λ dans k et tout x dans E, λx est nul si et seulement si λ ou x est nul.

Exercice 41
On appelle (très provisoirement !) un machin un ensemble dont la définition est la même que celle d'un corps commutatif, mais où on a distraitement oublié d'exiger la commutativité de l'addition. Montrer que tout machin est un corps commutatif (suggestion : il faudra faire quelque chose à partir de l'expression $(1+1)(a+b)$.).

Exercice 42
Soit k et l deux corps commutatifs. On appelle *morphisme de corps* toute application f non identiquement nulle de k vers l qui vérifie pour tous x et y de k les deux conditions :

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \text{et} \qquad f(xy) = f(x)f(y).$$

1) Citer un exemple intéressant de morphisme de corps de $\mathbf{C}$ vers $\mathbf{C}$.
Dans les deux questions qui suivent, f désigne un morphisme de corps.

2) Montrer que f est une injection.

3) Montrer que $f(1) = 1$.