Feuille d'exercices n° 9

Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Exercice 1.
Résoudre, en $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable deux fois, les équations différentielles suivantes.

(a) $f'' - 3f' + 2f = 0$,
(b) $f'' + 4f = 0$,
(c) $f'' + 2f' + 2f = 0$,
(d) $\forall t \in \mathbb{R},\ f''(t) + 2f'(t) + f(t) = t$,
(e) $\forall t \in \mathbb{R},\ f''(t) + f'(t) - 2f(t) = e^t$,
(f) $\forall t \in \mathbb{R},\ f''(t) + 2f'(t) + 2f(t) = \sin t$,
(g) $\forall t \in \mathbb{R},\ f''(t) + f(t) = 1 + \cos(2t)$,
(h) $\forall t \in \mathbb{R},\ f''(t) + f'(t) + f(t) = te^t$.

Pour les équations (a), (b) et (h), donner la solution qui vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

Exercice 2.
Déterminer les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} f''(t) + \lambda f(t) = 0,\ t \in \mathbb{R}, \\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases}$$

admet des solutions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non identiquement nulles et calculer ces solutions.

Exercice 3.
Dans cet exercice, on s'intéresse à l'équation différentielle suivante :

$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ f''(t) + f(t) = \tan t. \tag{1}$$

1. Soit $f \in \mathcal{C}^2(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$.
   (a) Justifier qu'il existe $u \in \mathcal{C}^2(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$ tel que pour tout $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $f(t) = \cos t\, u(t)$.
   (b) Montrer que f est solution de (1) si et seulement si u est solution de
   $$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \cos t\, u''(t) - 2\sin t\, u'(t) = \tan t. \tag{2}$$
2. Résoudre, en $v :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ dérivable, l'équation différentielle
   $$\forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,\ \cos t\, v'(t) - 2\sin t\, v(t) = \tan t.$$
3. En utilisant le changement de variable $x = \sin t$, déterminer les primitives de $t \mapsto \frac{1}{\cos t}$ sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
4. Résoudre, en $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, l'équation différentielle (1).